DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE DER UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES R_n KONSTANTER KRÜMMUNG*

BY

WALTHER MAYER

Einleitung: Die Stellung des Problems

Wie eine Strecke durch ihre Länge, ein Dreieck durch seine Seiten und eine Kurve durch ihre Bogenlänge und die Krümmungen bis auf eine Kongruenz-Transformation im R_n konstanter Krümmung bestimmt sind, so ist auch die e-dimensionale Fläche (F_e, $e=1, 2, \cdots, n-1$) des R_n konstanter Krümmung durch ein System von invarianten Formen bis auf ihre Lage im R_n festgelegt.

Wir meinen damit den Kongruenz-Satz:

Kongruente F_e haben gleiche Formen-Systeme und umgekehrt.

Zu der Aufgabe der Herstellung eines die F_e vollständig bestimmenden Formen-Systems tritt ganz natürlich die, *die Bedingungen dafür anzugeben, dass es zu einem gegebenen System von Formen eine F_e dieses Formen-Systems gibt.* (Für die F_2 des euklidischen R_3: die Gauss'schen resp. Codazzi'schen Relationen.)

Die beiden so skizzierten Probleme wurden 1924 von C. Burstin und dem Verfasser gelöst (das zweite Problem für das vollständige System der "Masstensoren"); die Darstellung (siehe Duschek-Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, in der Folge als *Lehrbuch* zitiert) benutzt aber Hilfs-Beine, die die Normal-Vektorräume der F_e aufspannen, und die zwar ohne Schaden eingeführt werden können, aber als "fremdes Element" einen Schönheitsfehler für die Darstellung bedeuten.

In der nun vorliegenden Arbeit wird dieser "Schönheitsfehler" beseitigt.† Die neue Darstellung hat damit den Vorzug, mit den Koordinaten des Raumes R_n und den Parametern der Fläche F_e allein auszukommen: Bein-Indizes gibt es keine.

Es ist natürlich klar, dass sich in dieser Darstellung dann alle geometrischen Verhältnisse im Formalismus klarer zu erkennen geben, unverwischter, da zwischen Objekt und Symbol sich nichts fremdes mehr einschiebt.

* Presented to the Society, April 20, 1935; received by the editors December 12, 1934.

† Es soll damit nicht behauptet sein, dass die ursprüngliche Darstellung (*Lehrbuch*) nun überflüssig geworden ist, da gerade für die Behandlung spezieller Probleme sich die Einführung von Hilfs-Beinen als zweckmässig erweist.

Die vorliegende Arbeit hat bereits einen Vorgänger: Eine mit C. Burstin gemeinsam verfasste, aber vom Schreiber allein ausgearbeitete Schrift (Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 35 (1928), pp. 87–110: *Über das vollständige Formensystem . . .*) enthält eine solche Hilfs-Bein-freie Darstellung der Theorie.

Methodische Unzulänglichkeiten aber, aus dem natürlichen Bestreben entstanden, für die Darstellung der Vektoren von Vektorräumen ausschliesslich *unabhängige* Basis-Vektoren zu verwenden, hatten eine Unsymmetrie in der Behandlung gleichartiger Objekte zur Folge, die nicht in der Natur des Problemes liegt.

Es galt also das Widerstreben zu beseitigen, eine nicht linear unabhängige Vektor-Basis für die Beschreibung zu verwenden, und damit jenes Basis-Bein voll zu benutzen, das sich völlig natürlich dem Geometer darbietet.

Eine Neubearbeitung der erwähnten Schrift erschien uns auch umso erstrebenswerter, als die hier gebotene Theorie keine triviale Verallgemeinerung der Verhältnisse des Dreidimensionalen darstellt, sondern im Gegenteil ganz neue Erkenntnisse vermittelt.

Dies klar hervortreten zu lassen war auch unser Hauptbestreben. Wir gingen daher auch viel genauer ein auf die geometrische Natur aller auftretenden Grössen, als dies in der erwähnten Schrift und in der Darstellung des *Lehrbuchs* geschah.

Es war dabei nicht immer leicht, sich der Lockung eines allzuliebevollen Eingehens in die Details zu entziehen, doch geschah dies im Interesse der Einheitlichkeit der Darstellung.

Was das verwendete Formen-System betrifft, so kann eine solches auch für die F_e eines beliebigen Riemannschen Raumes definiert werden (Schlussparagraph).*

Da es aber in einem solchen Raume den Begriff einer Kongruenz nicht gibt, so hat das so definierte Formen-System keine besonders tiefe Bedeutung.

Aus didaktischen Gründen werden in der vorliegenden Arbeit (wie im *Lehrbuch*) zuerst die Verhältnisse im Euklidischen besprochen. Der Leser braucht dann, sobald rechtwinklige kartesische Koordinaten eingeführt werden, von einem "verallgemeinerten Ricci-Kalkül" nichts zu wissen.

Es genügen gerade jene Kenntnisse des Tensor-Kalküls, die dem feldtheoretisch orientierten mathematischen Physiker heutzutage geläufig sind.

Den R_n konstanter Krümmung erledigen wir im Schlussparagraphen.

* I. A. Schouten und E. R. van Kampen, *Über die Krümmung einer V_m in V_n*, Mathematische Annalen, vol. 105 (1931).

1. Die Schmieg- und Normal-Vektorräume der F_e im euklidischen R_n

Wie in der Einleitung erwähnt, benutzen wir in unserer Darstellung die sogenannten rechtwinklig-kartesischen Koordinaten zur Beschreibung des euklidischen R_n. Die zulässigen Koordinatentransformationen, nämlich die, welche den Masstensor

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \tag{1}$$

numerisch invariant lassen, nennt man ortogonale Transformationen. Als Punkt-Transformationen aufgefasst, stellen sie die Kongruenz-Transformationen des euklidischen R_n dar.

Die F_e liege in der Parameterdarstellung vor

$$x_i = x_i(y_1, \cdots, y_e) \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{2}$$

Was Stetigkeit und Differenzierbarkeit der in der Folge auftretenden Funktionen betrifft, so setzen wir sie voraus, soweit unser Problem es erheischt. Es wäre ja von gar keinem Nutzen, den Gedankengang jedesmal zu unterbrechen, um diese differentialgeometrisch unwesentlichen Voraussetzungen an jeder Stelle genau zu fixieren.

Wir betrachten nun den beliebigen Punkt P der F_e; in ihm sind durch die e Raum-Vektoren*

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \qquad (p = 1, \cdots, l) \tag{3}$$

ein l-Bein aufgespannt: *der erste Schmieg-Vektorraum oder Tangential-Vektorraum I_1 der F_e.*

Der Tangential-Vektorraum I_1 hängt von der Wahl der Flächenparameter $(y_1, \cdots, y_e)$ nicht ab. Ist nämlich

$$\begin{aligned} \bar{y}_p &= \bar{y}_n(y_1, \cdots, y_e), \\ y_p &= y_p(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_e) \end{aligned} \tag{4}$$

---

* Wenn wir von einer geometrischen Grösse als Raum-Tensor sprechen, so meinen wir den Transformationscharakter bei Veränderung der Raumkoordinaten allein (also bei Fixierung der Flächenparameter $y_1, \cdots, y_e$).

Ebenso wollen wir von einer Grösse als Flächen-Tensor sprechen, sobald wir ihren Transformationscharakter bei Veränderung der Flächenparameter allein beschreiben.

So werden wir ein und dieselbe Grösse je nach Notwendigkeit einmal als Raum-Tensor und einmal als Flächen-Tensor ansprechen.

Wenn der gemeinte Tensorcharakter aber ohne weiteres einzusehen ist, werden wir die nähere Angabe (Raum- resp. Flächentensor) späterhin unterlassen. (Also besonders bei jenen Grössen, die nur Raum- oder nur Flächenindizes enthalten.)

eine Parametertransformation, so folgt aus

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p}, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_r}\frac{\partial \bar{y}_r}{\partial y_p} \tag{5}$$

sofort die Identität der Vektorräume

$$\left\{\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p}\right\}. \tag{6}$$

Als Flächengrössen aufgefasst, d.h. bei Transformation der y, sind die $\partial x_i/\partial y_p$ $(i=1, \cdots, n)$ ein System von n kovarianten (Flächen) Vektoren. Der zweite Schmieg-Vektorraum I_{12} im Punkte P der F_e ist definiert durch Gesamtheit der Raum-Vektoren

$$\left\{\frac{\partial x_i}{\partial y_p}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right\}. \tag{7}$$

Wie der Tangential-Vektorraum I_1 ist auch dieser Vektorraum von der Wahl der Flächenparameter unabhängig.

In der Tat gilt ja neben (5) das durch Differentiation von (5) abgeleitete System

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q} &= \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\frac{\partial^2 y_r}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s}\frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p}\frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_q}, \\ \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} &= \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_r}\frac{\partial^2 \bar{y}_r}{\partial y_p \partial y_q} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{y}_r \partial \bar{y}_s}\frac{\partial \bar{y}_r}{\partial y_p}\frac{\partial \bar{y}_s}{\partial y_q}. \end{aligned} \tag{8}$$

Aber aus (5) und (8) folgt die Invarianz des I_{12} gegen Parametertransformationen.

Die Relationen (5) und (8) sind nur Spezialfälle einer durch Rekursion herzuleitenden allgemeinen Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{p_1} \cdots \partial \bar{y}_{p_h}} &= \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}}\frac{\partial y_{r_1}}{\partial \bar{y}_{p_1}} \cdots \frac{\partial y_{r_h}}{\partial \bar{y}_{p_h}} + \sum_{k=1}^{h-1} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}(\cdots), \\ \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} &= \frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \cdots \partial \bar{y}_{r_h}}\frac{\partial \bar{y}_{r_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{y}_{r_h}}{\partial y_{p_h}} + \sum_{k=1}^{h-1} \frac{\partial^k x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \cdots \partial \bar{y}_{r_k}}(\cdots). \end{aligned} \tag{9}$$

Definieren wir als *kten Schmieg-Vektorraum* $I_{12\cdots k}$ den Vektorraum

$$\left\{\frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1}\partial y_{p_2}}, \cdots, \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}\right\} \tag{10}$$

so folgt aus (9) für $h=1, 2, \cdots, k$ die Invarianz des $I_{12\cdots k}$ gegenüber Parametertransformation.

Nachdem wir so die (invarianten) Schmieg-Vektorräume im Punkt P der F_e definiert haben, kommen wir zu weiteren (invarianten) Vektorräumen, den *Normal-Vektorräumen der* F_e.

Die Schmieg-Vektorräume sind so definiert, dass der $I_{12\cdots k}$ den $I_{12\cdots k-1}$ enthält.

Die Gesamtheit der Vektoren des $I_{12\cdots k}$ *die auf den* $I_{12\cdots k-1}$ *normalstehen, bildet ebenfalls einen linearen Vektorraum, den wir den Normal-Vektorraum* I_k *der* F_e *nennen.*

So ist der I_2 definiert als der grösste Unter-Vektorraum des I_{12}, der auf den Tangential-Vektorraum I_1 normal steht u. s. w.

Wir führen jetzt die folgende Bezeichnung ein:

Die Projektion irgend eines im Punkte P der F_e *definierten Raum-Vektors* λ_i $(i=1, \cdots, n)$ *in den Vektorraum* $I_{12\cdots k}$ *(resp.* I_k*) bezeichnen wir* $\underline{\lambda_{i_{12\cdots k}}}$ *(resp.* $\underline{\lambda_{i_k}}$*).*

Den Raum-Vektor

$$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}_{k}$$

aber werden wir in der Folge stets ohne das am Querstrich angehängte k, also

$$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}$$

schreiben.

Betrachten wir jetzt die Relation (9) als eine zwischen den Raum-Vektoren, die in ihr auftreten, so ergibt die Projektion in den I_h-Vektorraum, da dieser zum $I_{12\cdots h-1}$ normal steht:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{p_1} \cdots \partial \bar{y}_{p_h}}} &= \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}}}\,\frac{\partial y_{r_1}}{\partial \bar{y}_{p_1}} \cdots \frac{\partial y_{r_h}}{\partial \bar{y}_{p_h}}, \\ \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}} &= \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial \bar{y}_{r_1} \cdots \partial \bar{y}_{r_h}}}\,\frac{\partial \bar{y}_{r_1}}{\partial y_{p_1}} \cdots \frac{\partial \bar{y}_{r_h}}{\partial y_{p_h}}. \end{aligned}$$

Die Raum-Vektoren

$$(12)\qquad \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}}$$

die ersichtlich den I_k*-Vektorraum aufspannen,* verhalten sich also in bezug auf die Transformation der y wie ein System von n $(i=1, \cdots, n)$ *symmetrischen kovarianten Flächentensoren hter Stufe.*

(Die oben gegebene Konstruktion der Normal-Vektorräume der F_e, durchgeführt für die F_1 (Kurve), führt natürlich auf ihre Normal-Vektoren.) Bei der Konstruktion der $I_{12\cdots k}$-Schmieg-Vektorräume werden wir einmal zu einem $I_{12\cdots m}$ gelangen, der Eigenschaft

$$(13)\qquad \begin{aligned} &I_{12\cdots m} \not\equiv I_{12\cdots m-1}, \qquad \text{aber} \\ &I_{12\cdots m+1} \equiv I_{12\cdots m}. \end{aligned}$$

Wir nennen dann $I_{12\cdots m}$ *den "letzten" oder "grössten" Schmieg-Vektorraum der* F_e. In der Tat folgt aus (13)

$$(14)\qquad I_{12\cdots m+2} \equiv I_{12\cdots m+1} \equiv I_{12\cdots m} \qquad \text{u. s. w.}$$

Ist $I_{12\cdots m}$ der letzte Schmieg-Vektorraum, so folgt aus der zweiten Gleichung (13)

$$(15)\qquad I_{m+1} \equiv 0,$$

d. h. der I_{m+1} ist leer, er existiert nicht. Ebenso folgt aus (14) $I_{m+2} \equiv 0$ u. s. w.

Wir können statt (15) auch schreiben

$$(16)\qquad \underline{\frac{\partial^{m+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{m+1}}}} \equiv 0$$

und in der Folge

$$(17)\qquad \underline{\frac{\partial^{N} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_N}}} \equiv 0 \qquad \text{für } N > m.$$

Das Raum-Vektorbein

$$(18)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \quad \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2}}}, \cdots, \underline{\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}}}$$

nennen wir kurz eine *Basis der Schmieg-Vektorräume der* F_e. In Bezug auf die Transformationen der Parameter stellt die Basis ein System von kovarianten und symmetrischen Flächentensoren erster bis $m$ter Stufe dar.

2. Das System der Grundformen der F_e; die Masstensoren der I_h-Räume

Ein Raum-Vektor, der ganz im I_h liegt, hat als Darstellung

$$(1)\qquad \lambda_i = \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}}\, l^{p_1 \cdots p_h}.$$

Die Darstellungsgrössen $l^{p_1 \cdots p_h}$, die wir symmetrisch in allen Indizes wählen, bilden ihrem Transformationscharakter nach einen *symmetrischen kontravarianten Flächentensor hter Stufe.*

Ein solcher Tensor hat

$$L_h = \binom{e + h - 1}{h}$$

verschiedene Komponenten.

Da im allgemeinen die den I_h aufspannenden Raumvektoren

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}$$

nicht linear unabhängig sein werden, hat auch der Nullvektor ($\lambda_i = 0$) Darstellungen

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \theta^{p_1 \cdots p_h}$$

mit $\theta^{p_1 \cdots p_h}$, die nicht alle verschwinden. Die Anzahl linear unabhängiger Lösungen von (2), d_h, ist gegeben durch

$$(3) \qquad d_h = L_h - l_h,$$

wenn l_h die Dimension des I_h ist, d. h. der Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \right\|.$$

In der Darstellung (1) des Vektors λ_i des I_h sind die $l^{p_1 \cdots p_h}$ bis auf eine additive *Null Lösung* $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ von (2) bestimmt.

Für die Länge $(\lambda_i \lambda_i)^{1/2}$ des Vektors λ_i gibt (1)

$$(4) \qquad \begin{aligned} \lambda_i \lambda_i &= \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}} l^{p_1 \cdots p_h} l^{q_1 \cdots q_h} \\ &= E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} l^{p_1 \cdots p_h} l^{q_1 \cdots q_h}, \end{aligned}$$

wo der kovariante Flächentensor

$$(5) \qquad E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} = \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}} \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}}$$

nach (4) der Masstensor für die durch die $l^{p_1 \cdots p_h}$ dargestellten Vektoren des I_h ist. Der Masstensor (5) enthält nur Flächen-Indizes mehr, er ist in den (durch den Querstrich getrennten) beiden Indizes-h-Tupel symmetrisch und ausserdem symmetrisch in bezug auf die Indizes eines jeden der beiden h-Tupel. Da er zudem als inneres Produkt zweier Raum-Vektoren bei ortogonalen (Kongruenz) Transformationen invariant bleibt, so folgt, *dass kongruente Flächen F_e äquivalente Masstensoren der I_h Räume haben* (d. h. bei geeigneter Wahl der Parameter *gleiche* Masstensoren).

Multiplizieren wir (2) mit

$$\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}}}$$

so gewinnen wir

$$0 = E_{q_1 \cdots q_h | p_1 \cdots p_h} \theta^{p_1 \cdots p_h}. \tag{6}$$

Somit ist jede Null Lösung $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ von (2) eine Lösung von (6). Ist dann umgekehrt der Tensor $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ eine Lösung von (6), so folgt nach Multiplikation mit $\theta^{q_1 \cdots q_h}$ nach (5)

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_h}}} \theta^{q_1 \cdots q_h}\right) \left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}} \theta^{p_1 \cdots p_h}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}} \theta^{p_1 \cdots p_h}\right)^2, \end{aligned} \tag{7}$$

d. h. es gilt (2).

Wir haben damit das wichtige Resultat gewonnen:

Die Gleichungen (2) *und* (6) *für die* $\theta^{p_1 \cdots p_h}$ *haben dieselben Lösungen.*

Das bedeutet aber, dass die Matrizen*

$$\left\| \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h} \right\| \tag{8}$$

den gleichen Rang haben: *Die Dimension des I_h-Vektorraums l_h ist also zugleich der "Rang" des Masstensors $E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h}$ dieses Vektorraums.* Ist $I_{12 \cdots m}$ der letzte Schmieg-Vektorraum, so ist das vollständige System der Masstensoren der F_e das System der m Tensoren

$$E_{p_1 | q_1}, \; E_{p_1 p_2 | q_1 q_2}, \; \cdots, \; E_{p_1 \cdots p_m | q_1 \cdots q_m}. \tag{9}$$

Der symmetrische Masstensor des I_1

---

* In der Matrix $\|E_{p_1 \cdots p_h | q_1 \cdots q_h}\|$ entspricht einem bestimmten p-Tupel eine Zeile und einem bestimmten q-Tupel eine Spalte.

$$E_{p|q} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_i}{\partial y_q} \tag{10}$$

ist der metrische Tensor der F_e (als l-dimensionaler Riemannscher Raum betrachtet).

Wir werden im Folgenden zeigen können, dass die Masstensoren (9) die F_e bis auf ihre Lage im R_n, also bis auf Kongruenz, bestimmen. Aber wir zeigen mehr!

Definieren wir nämlich durch

$$E_{p_1\cdots p_k|p_{k+1}\cdots p_{2k}} l^{p_1}\cdots l^{p_{2k}} = B_{p_1\cdots p_{2k}} l^{p_1}\cdots l^{p_{2k}} \tag{10'}$$

die in allen Indizes $p_1, p_2, \cdots, p_{2k}$ symmetrischen kovarianten Flächentensoren, die Grundtensoren $B_{p_1\cdots p_{2k}}$, $k=1, 2, \cdots, m$, so können wir zeigen, dass bereits durch die Grundtensoren

$$B_{pq} = E_{p|q},\ B_{p_1\cdots p_4},\ \cdots,\ B_{p_1\cdots p_{2m}} \tag{11}$$

die F_e bis auf Kongruenz festgelegt ist.

Der Vergleich der Koeffizienten von $l^{p_1}\cdots l^{p_{2k}}$ in (10) führt auf

$$(2k)!B_{p_1\cdots p_{2k}} = \sum E_{c_1\cdots c_k|c_{k+1}\cdots c_{2k}}, \tag{12}$$

wo in der Summe rechts die $c_1, c_2, \cdots, c_{2k}$ alle $(2k)!$ Permutationen von $p_1p_2\cdots p_{2k}$, also auch gleiche, durchlaufen.*

3. Die Frenet-Gleichungen für die F_e des R_n

Um das in der Einleitung gestellte Problem zu lösen, müssen wir ein System totaler Differential-Gleichungen für die Grössen

$$x_i,\ \frac{\partial x_i}{\partial y_p},\ \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1}\partial y_{p_2}}},\ \cdots,\ \underline{\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_m}} \tag{1}$$

als Funktionen der $y_1, \cdots, y_e$ aufstellen: *die Frenet-Gleichungen der F_e.*

* In der Tat: Enthält $p_1, p_2, \cdots, p_{2k}$ der Reihe nach $a, b, \cdots, f$ gleiche Indizes, so ist

$$\frac{(2k)!}{a!b!\cdots f!}B_{p_1\cdots p_{2k}}$$

der Koeffizient von $l^{p_1}\cdots l^{p_{2k}}$ in (10′) rechts.

Der entsprechende Koeffizient links hat die Form der rechten Seite von (12), wobei aber in der Summe nur die verschiedenen Permutationen von $p_1, p_2, \cdots, p_{2k}$ auftreten. Da aber die rechte Seite diese $(a!\,b!\cdots f!)$-fach enthält, ist

$$\frac{1}{a!b!\cdots f!}\sum E_{c_1\cdots c_k|c_{k+1}\cdots c_{2k}}$$

der Faktor links.

Für x_i gilt

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} dy_p. \tag{2}$$

Wir gehen nun daran, die Differentiale der übrigen Grössen der Reihe (1) zu bestimmen.

Aus der Formel

$$\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} + \text{Vektor des } I_{12\cdots k-1} \tag{3}$$

gewinnen wir

$$\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\right) = \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_t} + \text{Vektor des } I_{12\cdots k}. \tag{4}$$

Somit gibt die Projektion in den I_{k+1}

$$\underline{\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\right)}_{k+1} = \frac{\partial^{k+1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_t}}, \tag{5}$$

und in den I_{k+r}, $r=2, 3, \cdots,$

$$\underline{\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\right)}_{k+r} = 0 \qquad (r = 2, 3, \cdots). \tag{6}$$

Also gilt die Darstellung für den Raum-Vektor

$$\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\right):$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\right) &= \Gamma^{r_1}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial x_i}{\partial y_{r_1}} + \Gamma^{r_1 r_2}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^2 x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2}}} \\ &\quad + \cdots + \Gamma^{r_1 \cdots r_k}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wir zeigen weiter, dass in (7)

$$\Gamma^{r_1 \cdots r_t}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^t x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_t}}} = 0 \quad \text{ist für } t = 1, 2, \cdots, k-2. \tag{7'}$$

Aus

$$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\;\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}} = 0, \tag{8}$$

für $h=1, 2, \cdots, k-2$ (allgemein für $h\neq k$) folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\right)\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}\\ &= -\,\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\;\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}\right), \text{ für } h = 1, 2, \cdots, k-2.\end{aligned} \tag{8'}$$

Nach (7) ist

$$\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}\right)$$

ein Raum-Vektor des $I_{12\cdots h+1}$, also wegen $h=1, 2, \cdots, k-2$, ein Raum-Vektor des $I_{12\cdots k-1}$.

Dagegen liegt

$$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}$$

im I_k. Da aber die Vektorräume $I_{12\cdots k-1}$ und I_k normal stehen, ist die rechte Seite (8′) und somit die linke Seite (8′) Null. Multiplizieren wir also (7) mit

$$\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_h}}} \qquad (h = 1, 2, \cdots, k-2),$$

so erhalten wir

$$\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_k p_{k+1}} E_{r_1\cdots r_h | s_1\cdots s_h} = 0. \tag{9}$$

Aus (9) aber folgt nach §2 die Behauptung (7′).

Wir schreiben somit statt (7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}}\left(\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\right) &= \Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k p_{k+1}}\,\underline{\frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{\;1}\cdots\partial y_{r_{k-1}}}}\\ &\quad + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k p_{k+1}}\,\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_k}}} + \underline{\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}\partial y_{p_{k+1}}}}.\end{aligned} \tag{10}$$

Für $k=m$ tritt noch hinzu §1 (16)

$$\frac{\partial^{m+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_{m+1}}} = 0. \tag{10'}$$

Wir können nun das System der Frenet-Gleichungen der F_e anschreiben:

$$\begin{aligned}
dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\, dy_p, \\
d\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) &= \left(\Gamma^{r}_{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right) dy_q, \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
d\left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}\right) &= \left(\Gamma^{r_1 \cdots r_{k-1}}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{k-1}}}\right. \\
&\quad \left. + \Gamma^{r_1 \cdots r_k}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}\right) dy_{p_{k+1}}, \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\
d\left(\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}}\right) &= \left(\Gamma^{r_1 \cdots r_{m-1}}_{p_1 \cdots p_m p_{m+1}} \frac{\partial^{m-1} x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{m-1}}}\right. \\
&\quad \left. + \Gamma^{r_1 \cdots r_m}_{p_1 \cdots p_m p_{m+1}} \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_m}}\right) dy_{p_{m+1}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Die in (11) auftretenden Koeffizienten

$$\Gamma^{r_1 \cdots r_{k-1}}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}}, \qquad \Gamma^{r_1 \cdots r_k}_{p_1 \cdots p_k p_{k+}} \tag{12}$$

seien in den oberen Indizes symmetrisch angenommen; sie sind bis auf Null Lösungen $\theta^{r_1 \cdots r_{k-1}}$ resp. $\theta^{r_1 \cdots r_k}$ von

$$\frac{\partial^{k-1} x_i}{\partial y_{r_k} \cdots \partial y_{r_{k-1}}} \theta^{r_1 \cdots r_{k-1}} = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} \theta^{r_1 \cdots r_k} = 0$$

fixiert.

Ausser der (angenommenen) Symmetrie in den oberen Indizes folgt für die Grössen (12) *die Symmetrie in den ersten k unteren Indizes aus* (11). Was nun den Charakter der Grössen (12) in bezug auf Parametertransformation betrifft (Raumtransformationen lassen sie invariant), untersuchen wir einen längs eines Kurvenstücks der F_e definierten Raum-Vektor λ_i des I_h

$$\lambda_i = \frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h}}} l^{p_1 \cdots p_h}. \tag{13}$$

Bilden wir $d\lambda_i$, so gewinnen wir nach (11)

$$\begin{aligned} d\lambda_i = {} & \frac{\partial^{h-1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{r_{h-1}}}} \Gamma^{r_1 \cdots r_{h-1}}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}} l^{p_1 \cdots p_h} dy_{p_{h+1}} \\ & + \frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}}} (dl^{r_1 \cdots r_h} + \Gamma^{r_1 \cdots r_h}_{p_1 \cdots p_h t} l^{p_1 \cdots p_h} dy_t) \\ & + \frac{\partial^{h+1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}}}} l^{p_1 \cdots p_h} dy_{p_{h+1}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Da $d\lambda_i$ invariant in bezug auf eine Parameteränderung ist, und die

$$\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}}, \quad l^{p_1 \cdots p_k}$$

symmetrische Tensoren in bezug auf diese Transformationen sind, folgt, dass (bis auf ihre Unbestimmtheit) die

$$\Gamma^{r_1 \cdots r_{h-1}}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}$$

Tensoren sind, wogegen die

$$\Gamma^{r_1 \cdots r_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}}$$

den Charakter von Christoffel-Symbolen haben.

In der Tat ist mit dem symmetrischen Tensor $l^{r_1 \cdots r_h}$ nach (14)

$$Dl^{r_1 \cdots r_h} = dl^{r_1 \cdots r_h} + \Gamma^{r_1 \cdots r_h}_{p_1 \cdots p_h t} l^{p_1 \cdots p_h} dy_t \tag{15}$$

ebenfalls ein symmetrischer Tensor, *den wir das I_k-Differential von $l^{r_1 \cdots r_k}$ nennen wollen.*

Will man die Relation (10) in eine Form bringen, die auch den tensoriellen Charakter der in ihr eintretenden Grössen in bezug auf die Parametertransformationen zur Geltung kommen lässt, hat man zu schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_{p_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_p \cdots \partial y_{p_k}}} \right) - \Gamma^{r_1 \cdots r_k}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} \\ & = \Gamma^{r_1 \cdots r_{k-1}}_{p_1 \cdots p_k p_{k+1}} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_{k-1}}}} + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k} \partial y_{p_{k+1}}}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Mit der rechten Seite hat jetzt auch die linke Seite Tensorcharakter sowohl in bezug auf die x- als auch auf die y-Transformationen.

Das Differential des Raumvektors λ_i des I_h liegt nach (14) nicht im I_h mehr. Dagegen gilt für seine Projektion in den I_h (14), (15)

$$\underset{\overline{\qquad h}}{d\lambda_i} = \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}\, Dl^{r_1\cdots r_h}. \tag{17}$$

Das Verschwinden der I_h-Ableitung des Darstellungstensors $l^{r_1\cdots r_h}$ eines Vektors λ_i des I_h bedeutet also, dass der Raumzuwachs $d\lambda_i$ auf den I_h normal steht. Einen Vektor λ_i des I_h dieser Eigenschaft nennen wir I_h-parallel.

Die I_1-Parallelverschiebung ist die von Levi-Civita.

In derselben Art, in der wir die I_h-Parallelverschiebung definierten, können wir eine Parallelverschiebung für Raum-Vektoren beliebiger Vektorräume definieren. Ist z. B. jetzt λ_i ein Vektor des $I_{12\ldots h}$, so definiert

$$\underset{\overline{\qquad 12\ldots h}}{d\lambda_i} \tag{18}$$

das $I_{12\ldots h}$-Differential von λ_i. Wir nennen λ_i nun $I_{12\ldots h}$-parallel, längs einer Kurve der F_e, wenn längs dieser das $I_{12\ldots h}$-Differential (18) verschwindet, also, wenn der räumliche Zuwachs von λ_i längs dieser Kurve stets normal steht zum $I_{12\ldots h}$. Die näheren Ausführungen bringen wir im §6.

Zuvor aber seien einige für diese Zwecke notwendigen Formeln hergeleitet. Ist in (13) $\lambda_i=0$, also $l^{p_1\cdots p_h}=\theta^{p_1\cdots p_h}$, so gibt (14) ($\tilde{\theta}$ bedeuten Nulltensoren):

$$\Gamma^{r_1\cdots r_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\theta^{p_1\cdots p_h} = \tilde{\theta}^{r_1\cdots r_{h-1}}_{(p_{h+1})}, \tag{19}$$

$$d\theta^{r_1\cdots r_h} + \Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h t}\theta^{p_1\cdots p_h}dy_t = \tilde{\theta}^{r_1\cdots r_h} \tag{20}$$

und

$$\underline{\frac{\partial^{h+1}x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}\partial y_{p_{h+1}}}}\,\theta^{p_1\cdots p_h} = 0, \quad \text{resp.} \quad E_{a_1\cdots a_{h+1}|p_1\cdots p_h p_{h+1}}\theta^{p_1\cdots p_h} = 0, \tag{21}$$

welche Relationen für jede Null Lösung $\theta^{p_1\cdots p_h}$ gelten von

$$\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\,\theta^{p_1\cdots p_h} = 0. \tag{22}$$

4. Berechnung der in den Frenet-Gleichungen eintretenden Γ-Koeffizienten und der Masstensoren der I_h-Räume aus den Grundformen der F_e. Beweis der Theoreme

Die innere Orientierung des Basis-Beins des $I_{12\cdots m}$

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}},\ \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1}\partial y_{p_2}}},\ \cdots,\ \underline{\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_m}}} \tag{1}$$

d. h. die Längen und Winkel der Raum-Vektoren (1) ist völlig bestimmt durch das System

$$\begin{aligned} &\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\ \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}} = 0, \quad \text{für } h \neq k, \\ &\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\ \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_h}}} = E_{p_1\cdots p_h|q_1\cdots q_h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn wir die Koeffizienten Γ der Frenet-Gleichungen und die Masstensoren E aus den Grundformen berechnet haben, so können wir das System der Frenet-Gleichungen als System totaler Differentialgleichungen für die Grössen

$$x_i,\ \frac{\partial x_i}{\partial y_p},\ \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_{p_1}\partial y_{p_2}}},\ \cdots,\ \underline{\frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_m}}} \tag{1'}$$

betrachten mit dem System (2) als zusätzliche Bedingungen (Nebenbedingungen). Wir haben zwei Probleme zu lösen.

Das erste ist der Beweis des *Kongruenz Satzes*:

Kongruente F_e haben gleiche Grundformen und umgekehrt sind F_e mit gleichen Grundformen kongruent.

Um das zu zeigen, genüget es zu wissen, dass die Koeffizienten der Frenet-Gleichungen wie die in (2) eintretenden E-Grössen durch die Grundformen eindeutig bestimmt sind.*

In der Tat folgt aus der Definition der Grundformen als innere Produkte von Raumvektoren ohne weiteres, dass kongruente F_e dieselben Grundformen haben. Haben aber zwei F_e gleiche Grundformen, und bestimmen diese eindeutig die Γ und E, so haben sie dasselbe System der Frenet-Gleichungen mit Nebenbedingungen (2).

Wir können also durch eine Kongruenztransformation erreichen, dass die

* Die Γ natürlich nur bis auf ihre Unbestimmtheit (Nulltensor), die in das Frenet-System wegen der Nebenbedingung (2) aber nicht mehr eintritt.

eine F_e in eine solche Lage kommt, dass in einem gemeinsamen Punkt der beiden F_e die Basis-Beine (1) zur Deckung kommen.

Wir haben damit zwei Lösungen (die erste F_e und die kongruent verpflanzte zweite) des Frenet-Systems mit gleichen Anfangsbedingungen.

Diese zwei Lösungen müssen daher ganz zusammenfallen (die Stetigkeit der Γ vorausgesetzt).

Damit ist das Kongruenztheorem bewiesen.

Unser zweites Problem ist *zu zeigen, dass es zu gegebenen Grundformen, wenn gewisse (in der Folge abgeleitete) Bedingungsrelationen zwischen den Komponenten dieser Grundformen erfüllt sind, stets F_e dieser Grundformen gibt.*

Um das zu zeigen, muss man aus der Theorie totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen folgendes wissen:

Unser System (2) stellt die Nebenbedingungen dar, die dem System (1′) der Lösungen des Frenet-Systems auferlegt sind, damit die integrierte F_e die gegebenen Grundformen hat.

Die sogenannten Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems stellen wieder Gleichungen zwischen den Grössen (1′) dar, also weitere Bedingungen, die, wenn (2) die einzigen Nebenbedingungen sein sollen, eine Folge von(2) sein müssen.

Unter dem *abgeleiteten System* des Systemes (2) verstehen wir jenes, das durch Differentiation des Systemes (2) unter Verwendung des Frenet-Systems entsteht. Da auch das abgeleitete System die Form von Gleichungen zwischen den Grössen (1′) hat, muss es eine Folge des Systemes (2) sein, wenn dieses das alleinige System der Nebenbedingungen ist.

Aus der Theorie totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen aber wissen wir, dass wir, wenn sowohl die Integrabilitätsbedingungen als auch das abgeleitete System der Nebenbedingungen eine Folge der Nebenbedingungen sind, das System für solche Anfangswerte lösen können, die den Nebenbedingungen genügen. Die integrierte Lösung erfüllt dann in ihrem ganzen Geltungsbereich die Nebenbedingungen.

Wir haben also zu zeigen, dass wir die E und Γ so berechnen, dass bei Erfülltsein gewisser Bedingungen zwischen den Komponenten der Grundformen, die Integrabilitätsbedingungen und das abgeleitete System aus (2) *eine Folge von* (2) *sind.*

Wir betrachten zuerst das aus (2) abgeleitete System:

Für $k=h\pm 2, h\pm 3, \cdots$ u. s. w. erhalten wir aus dem Frenet-System §3 (11) und (2)

$$d\left(\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\ \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)=0. \tag{3}$$

Das abgeleitete System dieses Teilsystems von (2) ist also von selbst eine Folge von (2).

Dagegen folgt aus

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\,\frac{\partial^{k+1}x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_{k+1}}}}\right)\\
(4)\qquad &= \frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\right)\frac{\partial^{k+1}x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_{k+1}}}}\\
&\quad + \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\,\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^{k+1}x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_{k+1}}}}\right)
\end{aligned}
$$

wegen (2) und §3 (11):

$$
(5)\qquad 0 = E_{p_1\cdots p_k t|q_1\cdots q_{k+1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{q_1\cdots q_{k+1}t}E_{r_1\cdots r_k|p_1\cdots p_k}.
$$

Das System (5) ist für eine gegebene F_e erfüllt. Wir werden es zur Berechnung der E and Γ-Grössen zu verwenden haben. Sofern dann die berechneten E und Γ das System nicht *identisch* erfüllen, stellt es *Bedingungsgleichungen für die Grundformen dar.* Ist (5) erfüllt, so ist die aus (2) für $k=h-1$ abgeleitete Gleichung eine Folge von (2).

Wir haben jetzt noch das aus der zweiten Relation des Systemes (2) abgeleitete System zu betrachten. Wir erhalten aus

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad \frac{\partial}{\partial y_t}E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k} &= \frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\right)\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\\
&\quad + \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\,\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)
\end{aligned}
$$

wegen (2) und §3 (11)

$$
(7)\qquad \frac{\partial}{\partial y_t}E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k} - \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t}E_{r_1\cdots r_k|q_1\cdots q_k} - \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{q_1\cdots q_k t}E_{r_1\cdots r_k|p_1\cdots p_k} = 0.
$$

Diese Gleichung ist für eine gegebene F_e erfüllt. (Sie sagt aus, dass die I_h-Ableitung des Masstensors des I_h verschwindet.)

Wir verwenden (7) wie (5) zur Berechnung der E und Γ und es gilt für (7), was wir für (5) schrieben.

Ist (7) erfüllt, so ist die aus der zweiten Relation (2) abgeleitete Gleichung eine Folge von (2).

Unser Resultat lautet:

Gelten die Relationen (5) *und* (7), *so ist das aus* (2) *abgeleitete System eine Folge von* (2).

Die Gleichungen (5) und (7) genügen allein noch nicht zur Berechnung der E und Γ, wohl aber zusammen mit den Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems.

Die Berechnung geschieht schrittweise, ausgehend von der Integrabilitätsbedingung der ersten der Frenet-Gleichungen §3 (11).

Diese Integrabilitätsbedingung wird unter Verwendung des Frenet-Systems aus

$$\frac{\partial}{\partial y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) - \frac{\partial}{\partial y_p}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\right) = 0 \tag{8}$$

gewonnen. Sie lautet

$$\Gamma^{r}_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} = \Gamma^{r}_{qp}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p}}, \tag{8'}$$

und zerfällt als Folge von (2) in

$$(\Gamma^{r}_{pq} - \Gamma^{r}_{qp})\frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0 \tag{9}$$

und

$$\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} - \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p}} = 0. \tag{9'}$$

Die Relation (9′) ist als Folge von (2) erfüllt. In der Tat ist ihre linke Seite, multipliziert mit $\partial^2 x_i/\underline{\partial y_r \partial y_s}$, wegen (2) und der Symmetrie Eigenschaft der $E_{pq|rs}$ Null. Also verschwindet auch der absolute Betrag des Raum-Vektors der linken Seite von (9′) und somit dieser Vektor selbst als Folge von (2).

Multipliziert man (9) mit $\partial x_i/\partial y_s$ so gibt das nach (2)

$$(\Gamma^{r}_{pq} - \Gamma^{r}_{qp})E_{r|s} = (\Gamma^{r}_{pq} - \Gamma^{r}_{qp})B_{rs} = 0. \tag{9''}$$

Ist (9″) erfüllt, dann gilt (§2) (9). *Also ist* (9) *eine Folge von* (2), *sobald* (9″) *gilt. Von der ersten Grundform B_{rs}, der Massform der F_e wird $|B_{pq}| \neq 0$ vorausgesetzt.**

Dann ist (9″) äquivalent

$$\Gamma^{r}_{pq} = \Gamma^{r}_{qp}. \tag{9'''}$$

* Eine Voraussetzung, die für die gegebene F_e natürlich erfüllt ist.

Diese Relation zusammen mit (7) für $k=1$ gestattet aber (bekanntlich) die Berechnung der Γ^r_{pq}.

In der Tat lautet (7) für $k=1$:

$$\partial E_{p|q}/\partial y_t = \Gamma^r_{pt}E_{r|q} + \Gamma^r_{qt}E_{r|p}. \tag{10}$$

Setzen wir

$$\partial E_{p|q}/\partial y_t = (pqt)$$

so gilt (9''')

$$\begin{aligned}(pqt) - (tpq) + (qtp) &= (\Gamma^r_{pt} + \Gamma^r_{tp})E_{r|q} + (\Gamma^r_{qt} - \Gamma^r_{tq})E_{r|p} + (\Gamma^r_{pq} - \Gamma^r_{qp})E_{r|t}\\ &= 2\Gamma^r_{pt}E_{r|q}.\end{aligned} \tag{11}$$

Wegen $|E_{r|q}| \neq 0$ aber erhalten wir aus (11) die Γ^r_{pt} *als die bekannten Christoffelgrössen* für den Masstensor

$$B_{pq} = E_{p|q}. \tag{12}$$

Wir haben damit als Resultat:

Aus der Integrabilitätsbedingung der ersten Gleichung des Frenet-Systems und (7) *für* $k=1$ *konnten wir die in der zweiten Gleichung des Frenet-Systems auftretenden* Γ *als Funktion der* $B_{pq}=E_{p|q}$ *allein berechnen.* (Da $|B_{pq}| \neq 0$ angenommen wurde, ist $\|\partial x_i/\partial y_t\|$ vom Range l (§2 (8).) *Wir konstatieren nochmals, dass die bei dieser Berechnung benutzte Integrabilitätsbedingung eine Folge des Systems* (2) *ist.*

Wir könnten bereits hier den allgemeinen (Rekursions)-Schluss durchführen, wollen aber des besseren Verständnis wegen vorerst noch den zweiten Schritt in unserer Schlussfolge tun, d. h. die Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung des Frenet-Systems zur Berechnung des Masstensors $E_{ab|cd}$ des I_2 und der Γ Koeffizienten der dritten Gleichung des Frenet-Systems heranziehen.

Wir haben also aus §3 (11)

$$\frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial}{\partial y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y_q}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)\right] = 0 \tag{13}$$

zu berechnen. Wir erhalten für den ersten Term in (13)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Gamma^r_{pq}}{\partial y_t}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \Gamma^r_{pq}\left(\Gamma^s_{rt}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_s} + \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r\partial y_t}}\right) + \Gamma^r_{pqt}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\\ &\qquad + \Gamma^{rs}_{pqt}\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r\partial y_s}} + \underline{\frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p\partial y_q\partial y_t}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Bilden wir (13), so zerfällt dieses System wegen (2) in

$$
\left(\frac{\partial}{\partial y_t}\Gamma^{r}_{pq} - \frac{\partial}{\partial y_q}\Gamma^{r}_{pt} + \Gamma^{s}_{pq}\Gamma^{r}_{st} - \Gamma^{s}_{pt}\Gamma^{r}_{sq} + \Gamma^{r}_{pqt} - \Gamma^{r}_{ptq}\right)\frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0, \tag{15}
$$

$$
(\Gamma^{r}_{pq}\delta^{s}_{t} - \Gamma^{r}_{pt}\delta^{s}_{q} + \Gamma^{rs}_{pqt} - \Gamma^{rs}_{ptq})\,\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s}} = 0, \tag{16}
$$

und

$$
\underline{\frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p \partial y_q \partial y_t}} - \underline{\frac{\partial^3 x_i}{\partial y_p \partial y_t \partial y_q}} = 0. \tag{17}
$$

Die Relation (17) *ist eine Folge von* (2). Der Beweis ist analog dem für die entsprechende Behauptung (9′) betreffend.

Multipliziert man (15) mit $\partial x_i/\partial y_s$, so folgt wegen (5) für $k=1$

$$
R^{r}{}_{ptq}E_{r|s} = E_{st|pq} - E_{sq|pt}, \tag{18}
$$

wo die uns bereits bekannte linke Seite den ersten (Riemannschen) Krümmungstensor der F_e darstellt.

Die Relation (18) und die §2 (12) für $k=2$

$$
\begin{aligned}
3B_{pqrs} &= E_{pq|rs} + E_{pr|qs} + E_{ps|rq} \\
&= 3E_{pq|rs} + (E_{pr|qs} - E_{pq|rs}) + (E_{ps|rq} - E_{pq|rs})
\end{aligned} \tag{19}
$$

gestatten die Berechnung von $E_{pq|rs}$ durch die Komponenten der zwei ersten Grundformen B_{pq}, B_{pqrs}.

Haben wir aus (18) und (19) die $E_{pq|rs}$ gewonnen, so liefert die Einsetzung dieser Grössen in (18), (19) entweder Identitäten allein oder auch Bedingungsgleichungen für die Grundformen. (Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse zeigt aber, dass diese Relationen identisch erfüllt sind, also keine Bedingungsgleichungen liefern.) Da wir von den Relationen (15) durch Multiplikation mit $\partial x_i/\partial y_s$ zu (18) (bei Verwendung von (2)) gelangten, *so ist* (15) *eine Folge von* (2), *sobald* (18) *erfüllt ist.**

Zur Berechnung der Γ^{rs}_{pqt} verwenden wir (16) und (7) für $k=2$. Die letztere Gleichung lautet

$$
\frac{\partial E_{pq|rs}}{\partial y_t} = \Gamma^{ab}_{pqt}E_{ab|rs} + \Gamma^{ab}_{rst}E_{ab|pq}. \tag{20}
$$

* Wir erinnern, dass

$$
\underline{\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_r}}}\,\theta^{p_1\cdots p_r} = 0 \quad \text{und} \quad \underline{\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_r}}}\;\underline{\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_r}}}\,\theta^{p_1\cdots p_r} = 0
$$

dieselben Lösungen $\theta^{p_1\cdots p_r}$ haben.

Schreiben wir

$$\frac{\partial E_{pq|rs}}{\partial y_t} = (pqrst), \tag{21}$$

so benutzen wir zur Berechnung das folgende Teil-System von (20):

$$\begin{aligned}(pqrst) &- (stpqr) + (qrstp) - (tpqrs) + (rstpq)\\ &= (\Gamma^{ab}_{pqt} + \Gamma^{ab}_{tpq})E_{ab|rs} + (\Gamma^{ab}_{rst} - \Gamma^{ab}_{str})E_{ab|pq} + (\Gamma^{ab}_{qrp} - \Gamma^{ab}_{pqr})E_{ab|st}\\ &\quad + (\Gamma^{ab}_{stp} - \Gamma^{ab}_{tps})E_{ab|qr} + (\Gamma^{ab}_{rsq} - \Gamma^{ab}_{qrs})E_{ab|tp}.\end{aligned} \tag{22}$$

Die Multiplikation von (16) mit

$$\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_a \partial y_b}} \tag{23}$$

führt wegen (2) auf

$$E_{ab|rs}(\Gamma^{r}_{pq}\delta^{s}_{t} - \Gamma^{r}_{pt}\delta^{s}_{q}) = (\Gamma^{rs}_{ptq} - \Gamma^{rs}_{pqt})E_{rs|ab}. \tag{24}$$

Da uns aber die linken Seiten von (22) und (24) bereits bekannt sind, so können wir unter Verwendung der Symmetrieverhältnisse der Γ_{pqt} aus (22) und (24)

$$\Gamma^{ab}_{pqt}E_{ab|rs} \tag{25}$$

als bekannte Grösse in den B_{pq}, B_{pqrs} berechnen.

Aus (25) gewinnen wir endlich (bis auf die notwendige Unbestimmtheit; Nulltensor θ^{ab}) die Γ^{ab}_{pqt} durch die B_{pq}, B_{pqrs} allein ausgedrückt.

Da (24) *aus* (16) *durch Multiplikation mit* (23) *unter Verwendung von* (2) *gewonnen wurde, so ist, wenn* (24) *gilt,* (16) *eine Folge von* (2).

(Auch hier bleibt zu untersuchen, ob die zur Berechnung benutzten Relationen nach Einsetzung der gefundenen Werte identisch gelten, oder als Bedingungsgleichungen für die Grundformen anzusehen sind.)

Zur Berechnung der Γ^{r}_{pqt} verwenden wir wieder das System (5) für $k=1$:

$$E_{pk|qt} + \Gamma^{r}_{qtk}E_{r|p} = 0, \tag{26}$$

und erhalten daraus die Γ^{r}_{qth} in den Grössen B_{pq}, B_{pqrs} ausgedrückt.

Das Resultat unseres zweiten Schritts lautet also:

Aus der Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung des Systems der Frenet-Gleichungen und den Relationen (7) ($k=2$), (5) ($k=1$) *und* §2 (12) (*für* $k=2$) *konnten wir* $E_{ab|cd}$, *die Massform des* I_2 *und die in der dritten Gleichung des Frenet-System auftretenden* Γ *durch die Grössen* B_{pq}, B_{pqrs} *allein berechnen.*

Die bei der Rechnung benutzte Integrabilitätsbedingung ist dabei eine Folge von (2).

Wir beweisen jetzt das *Haupttheorem*:

Haben wir aus den Komponenten der h ersten Grundformen

$$B_{pq},\ B_{pqrs},\ \cdots,\ B_{p_1\cdots p_{2h}} \tag{27}$$

die Masstensoren der h ersten I_r *Räume,* $r=1,\cdots,h$:

$$E_{p|q},\ E_{pq|rs},\ \cdots,\ E_{p_1\cdots p_h|q_1\cdots q_h} \tag{28}$$

und die Koeffizienten der $(h+1)$ *ersten Gleichungen des Frenet-Systems*

$$\Gamma_{pq}^{r_1},\ \Gamma_{pqt}^{r_1},\ \Gamma_{pqt}^{r_1r_2},\ \cdots,\ \Gamma_{p_1\cdots p_hp_{h+1}}^{r_1\cdots r_{h-1}},\ \Gamma_{p_1\cdots p_hp_{h+1}}^{r_1\cdots r_h} \tag{29}$$

berechnet, so können wir aus der Integrabilitätsbedingung der $(h+1)$*ten Gleichung dieses Systems, ferner aus Relation* (7) *für* $k=h+1$, (5) *für* $k=h$ *und* §2 (12) *für* $k=h+1$ *sowohl den Masstensor des* I_{h+1}: $E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}}$, *als auch die Koeffizienten*

$$\Gamma_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}}^{r_1\cdots r_h},\qquad \Gamma_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}}^{r_1\cdots r_{h+1}}$$

der $(h+2)$*ten Gleichung des Frenet-System berechnen und zwar ausgedrückt durch die Grössen* (27) *und* $B_{p_1\cdots p_{2h+2}}$ *allein.*

Der Beweis verläuft ziemlich analog dem des zweiten Schrittes. Wir bilden zuerst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}}\left(\frac{\partial}{\partial y_{p_{h+1}}}\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}}\Gamma_{p_1\cdots p_{h+1}}^{r_1\cdots r_{h-1}}\cdot\frac{\partial^{h-1}x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_{h-1}}}} \\
&+\Gamma_{p_1\cdots p_{h+1}}^{r_1\cdots r_{h-1}}\left(\Gamma_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+2}}^{s_1\cdots s_{h-2}}\frac{\partial^{h-2}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h-2}}}}\right. \\
&\left.+\Gamma_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+2}}^{s_1\cdots s_{h-1}}\frac{\partial^{h-1}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h-1}}}}+\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_{h-1}}\partial y_{p_{h+2}}}}\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial y_{p_{h+2}}}\Gamma_{p_1\cdots p_hp_{h+1}}^{r_1\cdots r_h}\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}
\end{aligned}\tag{30}$$

$$+\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\left(\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{r_1\cdots r_h p_{h+2}}\frac{\partial^{h-1}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_h}}}+\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{r_1\cdots r_h p_{h+2}}\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_h}}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{h+1}x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}\partial y_{p_{h+2}}}}\right)+\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}}\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_h}}}$$

$$+\Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}}\frac{\partial^{h+1}x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_{h+1}}}}+\frac{\partial^{h+2}x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_{h+1}}\partial y_{p_{h+2}}}},$$

und erhalten die Integrabilitätsbedingung als Folge von (2) gespalten in

$$(\Gamma^{r_1\cdots r_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-2}}_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+2}}-\Gamma^{r_1\cdots r_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-2}}_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+1}})\frac{\partial^{h-2}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h-2}}}}=0; \tag{31}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}}{\partial y_{p_{h+2}}}-\frac{\partial\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}}{\partial y_{p_{h+1}}}+\Gamma^{r_1\cdots r_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+2}}\right.\\&\quad-\Gamma^{r_1\cdots r_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{r_1\cdots r_{h-1}p_{h+1}}+\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{r_1\cdots r_h p_{h+2}}\\&\quad\left.-\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{r_1\cdots r_h p_{h+1}}\right)\frac{\partial^{h-1}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h-1}}}}=0;\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}}{\partial y_{p_{h+2}}}-\frac{\partial\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}}{\partial y_{p_{h+1}}}+\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{r_1\cdots r_h p_{h+2}}\right.\\&\quad-\Gamma^{r_1\cdots r_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{r_1\cdots r_h p_{h+1}}+\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\delta^{s_h}_{p_{h+2}}-\Gamma^{s_1\cdots s_{h-1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\delta^{s_h}_{p_{h+1}}\\&\quad\left.+\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}p_{h+2}}-\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}p_{h+1}}\right)\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_h}}}=0;\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}\delta^{s_{h+1}}_{p_{h+2}}-\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}}\delta^{s_{h+1}}_{p_{h+1}}+\Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}p_{h+2}}\right.\\&\quad\left.-\Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2}p_{h+1}}\right)\frac{\partial^{h+1}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h+1}}}}=0;\end{aligned} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^{h+2}x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}\partial y_{p_{h+1}}\partial y_{p_{h+2}}}}-\frac{\partial^{h+2}x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}\partial y_{p_{h+2}}\partial y_{p_{h+1}}}}=0. \tag{35}$$

Die Relation (35) ist eine Folge von (2) (vergl. (17) und (9′)). Schreiben wir (31) bis (34) abkürzend

$$\frac{\partial^{h-2}x_i}{\underline{\partial y_{s_1}\cdots\partial y_{s_{h-2}}}}\theta^{s_1\cdots s_{h-2}}_{p_1\cdots p_{h+2}}=0, \tag{31′}$$

$$(32') \qquad \frac{\partial^{h-1} x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_{h-1}}} \theta^{s_1 \cdots s_{h-1}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

$$(33') \qquad \frac{\partial^{h} x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_{h}}} \theta^{s_1 \cdots s_{h}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

$$(34') \qquad \frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_{h+1}}} \theta^{s_1 \cdots s_{h+1}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

so erhält man die Gleichungen, die wir zur weiteren Rechnung verwenden durch entsprechende Multiplikation der obigen Relation mit

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{a_1} \cdots \partial y_{a_k}}, \qquad k = h-2, \text{ resp. } h-1, \text{ resp. } h, \text{ resp. } h+1,$$

bei Verwendung von (2) in der Gestalt

$$(31'') \qquad E_{a_1 \cdots a_{h-2} | s_1 \cdots s_{h-2}} \theta^{s_1 \cdots s_{h-2}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

$$(32'') \qquad E_{a_1 \cdots a_{h-1} | s_1 \cdots s_{h-1}} \theta^{s_1 \cdots s_{h-1}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

$$(33'') \qquad E_{a_1 \cdots a_{h} | s_1 \cdots s_{h}} \theta^{s_1 \cdots s_{h}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0,$$

$$(34'') \qquad E_{a_1 \cdots a_{h+1} | s_1 \cdots s_{h+1}} \theta^{s_1 \cdots s_{h+1}}_{p_1 \cdots p_{h+2}} = 0.$$

Sind (31″) *bis* (34″) *erfüllt, so sind die entsprechenden Integrabilitätsgleichungen* (31) *bis* (34) *eine Folge von* (2).

Die Relationen (31″) und (32″) enthalten nur die bereits berechneten Grössen (28), (29) und stellen also Gleichungen für die Reihe (27) dar, die, wie wir zeigen werden, bereits erledigt sind. Die Relation (33″) wieder hat die Form

$$(35') \qquad E_{a_1 \cdots a_h | s_1 \cdots s_h} \left(\Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}} \right) = \text{bekannt in den Grössen der Reihe (27).}$$

Nach Formel (5), für $k=h$ können wir statt (35) schreiben

$$(35'') \qquad E_{a_1 \cdots a_h p_{h+1} | p_1 \cdots p_h p_{h+2}} - E_{a_1 \cdots a_h p_{h+2} | p_1 \cdots p_h p_{h+1}} = \text{bekannt in den Grössen der Reihe (27).}$$

Gleichung (12) §2 für $k=h+1$ lautet

$$(36) \qquad (2h+2)! B_{p_1 \cdots p_{2h+2}} = \sum E_{c_1 \cdots c_{h+1} | c_{h+2} \cdots c_{2h+2}},$$

wo in der Summe rechts die $c_1, \cdots, c_{2h+2}$ *alle* $(2h+2)!$ Permutationen von $p_1 \cdots p_{2h+2}$ durchlaufen.

Bei Benutzung der Symmetrie-Eigenschaften von $E_{c_1\cdots c_{h+1}|d_1\cdots d_{h+1}}$ kann man aus (35″) und (36) den Masstensor $E_{c_1\cdots c_{h+1}|d_1\cdots d_{h+1}}$ des I_{h+1} eindeutig, und zwar durch die Grössen (27) und $B_{p_1\cdots p_{2h+2}}$ allein ausgedrückt, berechnen.

Aus der eben verwendeten Formel (5) für $k=h$ berechnet man weiter (und zwar aus $E_{a_1\cdots a_h|b_1\cdots b_h}$ und $E_{a_1\cdots a_{h+1}|b_1\cdots b_{h+1}}$, d. h. also) aus den $B_{p_1\cdots p_{2k}}$, $k=1,\cdots,h+1$, die

$$\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}}$$

mit der ihnen zukommenden Unbestimmtheit. Um die

$$\Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1} p_{h+2}} \tag{37}$$

zu berechnen, benutzen wir neben der Relation (34″) noch die Relation (7) für $k=h+1$:

$$\frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}} = \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1}t} E_{r_1\cdots r_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{q_1\cdots q_{h+1}t} E_{r_1\cdots r_{h+1}|p_1\cdots p_{h+1}}. \tag{38}$$

Wir bezeichnen

$$\frac{\partial}{\partial y_t} E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}} = (p_1\cdots p_{h+1}\,|\,q_1\cdots q_{h+1}\,|\,t) \tag{39}$$

und bilden das aus (38) gebildete System mit bekannter linker Seite:

$$\begin{aligned}
&(p_1\cdots p_{h+1}\,|\,q_1\cdots q_{h+1}\,|\,t) - (q_2\cdots q_{h+1}t\,|\,p_1\cdots p_{h+1}\,|\,q_1)\\
&\quad + (p_2\cdots p_{h+1}q_1\,|\,q_2\cdots q_{h+1}t\,|\,p_1) - (q_3\cdots q_{h+1}tp_1\,|\,p_2\cdots p_{h+1}q_1\,|\,q_2)\\
&\quad + (p_3\cdots p_{h+1}q_1q_2\,|\,q_3\cdots q_{h+1}tp_1\,|\,p_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - (q_4\cdots q_{h+1}tp_1p_2\,|\,p_3\cdots p_{h+1}q_1q_2\,|\,q_3)\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + (p_{h+1}q_1\cdots q_h\,|\,q_{h+1}tp_1\cdots p_{h-1}\,|\,p_h) - (tp_1\cdots p_h\,|\,p_{h+1}q_1\cdots q_h\,|\,q_{h+1})\\
&\quad + (q_1q_2\cdots q_{h+1}\,|\,tp_1\cdots p_h\,|\,p_{h+1})\\
&= \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1}t} E_{r_1\cdots r_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{q_1\cdots q_{h+1}t} E_{r_1\cdots r_{h+1}|p_1\cdots p_{h+1}}\\
&\quad - \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{q_2\cdots q_{h+1}tq_1} E_{r_1\cdots r_{h+1}|p_1\cdots p_{h+1}} - \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1}q_1} E_{r_1\cdots r_{h+1}|q_2\cdots q_{h+1}t}\\
&\quad + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_2\cdots p_{h+1}q_1p_1} E_{r_1\cdots r_{h+1}|q_2\cdots q_{h+1}t} + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{q_2\cdots q_{h+1}tp_1} E_{r_1\cdots r_{h+1}|p_2\cdots p_{h+1}q_1}\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad - \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{tp_1\cdots p_hq_{h+1}} E_{r_1\cdots r_{h+1}|p_{h+1}q_1\cdots q_h} - \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{p_{h+1}q_1\cdots q_hq_{h+1}} E_{r_1\cdots r_{h+1}|tp_1\cdots p_h}\\
&\quad + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{q_1\cdots q_{h+1}p_{h+1}} E_{r_1\cdots r_{h+1}|tp_1\cdots p_h} + \Gamma^{r_1\cdots r_{h+1}}_{tp_1\cdots p_hp_{h+1}} E_{r_1\cdots r_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Aus (40) und (34″), welche Gleichung geschrieben werden kann

$$(\Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}) E_{s_1\cdots s_{h+1}|a_1\cdots a_{h+1}} = \text{bekannt},$$

berechnen wir unter Verwendung der Symmetrie Eigenschaften der Γ

$$\Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} E_{s_1\cdots s_{h+1}|a_1\cdots a_{h+1}} = \text{bekannt}. \tag{41}$$

Daraus wieder erhält man (bis auf die ihnen zukommende Unbestimmtheit) die Grössen (37) ausgedrückt durch die Komponenten der Reihe (27) und $B_{p_1\cdots p_{2h+2}}$. Um schliesslich zu zeigen, dass die Integrabilitätsbedingungen (31″) und (32″) zu keinen neuen Bedingungsgleichungen zwischen den Formenkomponenten führen, bilden wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_s}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right)\right]\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\\
&= \frac{\partial}{\partial y_s}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right)\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right]\\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right)\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right).
\end{aligned}\tag{42}$$

Der zweite Term rechts ist aber

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right]\\
&\quad + \frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right].
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial}{\partial y_s}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right)\right]\right.\\
&\quad\left. - \frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\right)\right]\right\}\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\\
&= -\left\{\frac{\partial}{\partial y_s}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right]\right.\\
&\quad\left. - \frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right]\right\}\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}.
\end{aligned}\tag{43}$$

(Denn die Differenz der beiden Seiten von (43) ist nach (42)

$$\frac{\partial}{\partial y_s}\left[\frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\,\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_t}\left[\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_h}}}\,\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{q}\ \cdots\partial y_{q_k}}}\right)\right],$$

welcher Ausdruck für $h\neq k$ verschwindet, aber auch für $h=k$, die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Masstensoren vorausgesetzt.) Die linke Seite der Gleichung (43) stimmt mit der linken Seite (31″) für $k=h-2$ und mit der linken Seite (32″) für $k=h-1$ überein. Wir haben somit das Resultat:

Die Gleichung (31″), *die erste aus der Integrabilitätsbedingung der* $(h+1)$*ten Gleichung des Frenet-Systems hergeleitete, ist identisch mit der letzten Gleichung, die aus der Integrabilitätsbedingung der* $(h-1)$*ten Gleichung des Frenet-Systems entspringt. Und ebenso ist* (32″), *die zweite aus der Integrabilitätsbedingung der* $(h+1)$*ten Gleichung des Frenet-Systems hergeleitete, mit der vorletzten Gleichung identisch, die aus der Integrabilitätsbedingung der hten Gleichung des Frenet-Systems folgt. Als* (*mögliche*) *Bedingungsgleichungen für die Formen verbleiben somit die Relationen* (5) *und* (7), *weiter* (33″) *und* (34″) *und die Relationen* (36).

Da die integrierte F_e aber *reell* sein soll, eine stillschweigende Annahme, die in unseren Überlegungen wesentlich verwendet wurde, so müssen die E-Tensoren *positiv halbdefinit* sein, damit die Nebenbedingungen (2) durch ein *reelles* Basis-Bein erfüllbar sind.

Das gibt für die Grund-Tensoren aber Bedingungen, die anscheinend in eine einfache Gestalt nicht gebracht werden können.

Dagegen ist es nicht schwer, für die *Masstensoren* $E_{p_1\cdots p_h|q_1\cdots q_h}$ als vollständiges "Invarianten"-System die notwendigen und hinreichenden Bedingungsrelationen anzugeben:

Ausser der oben erwähnten Eigenschaft *positiv halbdefinit* zu sein, müssen sie die Relationen (5), (7), (33″), (34″) erfüllen.

Im folgenden Paragraphen leiten wir einige geometrische Tatsachen ab, die aus dem Haupttheorem sofort folgen.

5. Einige geometrische Folgerungen

I. Die Einbettungszahl der F_e

Wir definieren: Lässt sich eine F_e in eine ϵ-dimensionale Hyperebene E_ϵ, aber nicht in eine $(\epsilon-1)$-dimensionale $E_{\epsilon-1}$ einbetten, so nennen wir ϵ die *Einbettungszahl der* F_e.

Es gilt dann der Satz:

Bezeichnet l_σ die Dimension des I_σ, und ist I_m der letzte Normalvektorraum der F_e, so ist

$$\epsilon = \sum_{\sigma=1}^{m} l_\sigma. \tag{1}$$

D. h. die Einbettungszahl der F_e ist gleich der Dimension des grössten Schmieg-Vektorraums.

Wir gehen, um den Satz zu beweisen, auf das Frenet-System (§3 (11)) und die Nebenbedingungen (§4 (2)) für dasselbe zurück.

Für die gegebene F_e sind die dort auftretenden E und Γ-Grössen so gegeben, dass sowohl die Integrabilitätsbedingungen des Frenet-Systems als auch das aus den Nebenbedingungen abgeleitete System eine Folge dieser Nebenbedingungen sind. (Die Relationen (5), (7), (33''), (34'') und (36) des §4 sind erfüllt.)

Wenn wir daher die Anfangswerte für die Reihe

$$x_i, \ \frac{\partial x_i}{\partial y_{p_1}}, \cdots, \ \frac{\partial^m x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_m}} \tag{2}$$

so wählen können, dass die Nebenbedingungen (2) erfüllt sind, erhalten wir eine $\tilde{F}_e$ mit demselben Formensystem wie die F_e.

Das können wir aber in einem R_ϵ (d. h. einem Raum der Dimension des letzten Schmieg-Vektorraums der F_e) und in keinem R_ν, $\nu < \epsilon$. Wählen wir als den R_ϵ jene durch

$$x_{\epsilon+1} = 0, \quad x_{\epsilon+2} = 0, \cdots, x_n = 0 \tag{3}$$

gegebene ϵ-dimensionale Hyperebene des R_n, so liegt die integrierte $\tilde{F}_e$ ganz in diesem R_ϵ, und da sie der gegebene F_e kongruent ist, liegt auch diese ganz in einer ϵ-dimensionalen Hyperebene des R_n. Wie die $\tilde{F}_e$ selbst kann sie (schon vermöge der Nebenbedingungen (2) §4) in keiner Hyperebene niedrigerer Dimension liegen.

II. Über die Krümmungstensoren der F_e

Der Tensor

$$E_{p_1\cdots p_h p_{h+1} | q_1 \cdots q_h q_{h+1}} - E_{p_1 \cdots p_h q_{h+1} | q_1 \cdots q_h p_{h+1}} \tag{4}$$

ist (§4 (35')) ausdrückbar durch die Komponenten der ersten h Grundformen der F_e

$$B_{p_1 \cdots p_{2k}} \qquad (k = 1, \cdots, h) \tag{5}$$

resp. deren Ableitungen. *Wir nennen ihn den hten Krümmungstensor der F_e.*

(Der erste Krümmungstensor ist der Riemannsche Krümmungstensor der F_e.)

Es gilt der Satz:

Verschwindet für eine F_e der hte Krümmungstensor, so gibt es immer eine $\tilde{F}_e$, deren vollständiges Formensystem aus den h ersten Grundformen der F_e besteht.

Wenn wir im Frenet-System (§3 (11)) und im System der Nebenbedingungen (§4 (2)) alle

$$(6) \qquad \frac{\partial^t x_i}{\underline{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_t}}}, \qquad E_{r_1 \cdots r_t | a_1 \cdots a_t}$$

für $t > h$ und ausserdem $\Gamma^{r_1 \cdots r_h}_{p_1 \cdots p_{h+1} p_{h+2}}$ Null setzen, so erhalten wir ein analog gebautes System totaler Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen.

Können wir zeigen, dass auch für dieses die Integrabilitätsbedingungen, sowie das abgeleitete System der Nebenbedingungen *eine Folge der Nebenbedingungen sind*, so ist der Satz offenbar bewiesen.

Für das abgeleitete System der Nebenbedingungen gilt das, da die Relationen ((5) und (7), §4) wegen $\Gamma^{r_1 \cdots r_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1}} = 0$ erfüllt sind.

Was die Integrabilitätsbedingungen betrifft, so könnte sie nur die für die $(h+1)$te Gleichung des neuen Frenet-Systems nicht erfüllt sein, da nur diese Gleichung von der entsprechenden des ursprünglichen Systems abweicht.

Die fragliche Integrabilitätsbedingung aber ist aus der der ursprünglichen $(h+1)$ten Gleichung, wie wir sie §4 (31), (32), (33) und (34) anschrieben, sofort ableitbar.

Die Gleichungen (31) und (32) bleiben unverändert, (34) fällt weg, und nur die (33) entsprechenden Relationen unterscheiden sich um die Differenz

$$(7) \qquad (\Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}) \frac{\partial^h x_i}{\underline{\partial y_{s_1} \cdots \partial y_{s_h}}}$$

(wo die Γ natürlich die der gegebenen F_e sind). Aber (7) verschwindet, wenn

$$(8) \qquad (\Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1 \cdots s_h}_{p_1 \cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}) E_{s_1 \cdots s_h | a_1 \cdots a_h} = 0$$

ist. Das aber trifft gerade zu wegen §4 (5) und der Voraussetzung unseres Satzes.

Damit ist der Beweis geliefert.

Bemerkung. Für $h = 1$ hat die $\tilde{F}_e$ nur die erste Grundform. Sie hat also nur einen invarianten Vektorraum, den I_1. Ihre Einbettungszahl ist also gleich der Dimensionszahl des I_1, d. h. gleich e.

Die $\tilde{F}_e$, die ganz in einer E_e liegt, ist somit diese E_e selbst. *Damit ist die Abwickelbarkeit der F_e in eine E_e nachgewiesen, sobald der erste Krümmungstensor verschwindet.*

III. Untermannigfaltigkeiten F_r der F_e

Ein Hauptergebnis des vorhergehenden Paragraphen bringen wir in Erinnerung:

Die Masstensoren $E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k}$ wie die

$$\Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k p_{k+1}},\ \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k p_{k+1}}\ \textit{für}\ k = 1, \cdots, h$$

sind durch die h ersten Grundformen $B_{p_1\cdots p_{2k}}$, $k=1, \cdots, h$, bestimmt.

Wir betrachten eine in der F_e eingebettete F_r

$$y_p = y_p(z_1, \cdots, z_r) \qquad (p = 1, \cdots, l) \tag{9}$$

die wir als im euklidischen R_n liegend in der selben Art wie die F_e behandeln.

Der Tangential-Vektorraum der F_r wird durch die r Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_a} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial z_a} \qquad (a = 1, \cdots, r) \tag{10}$$

aufgespannt und liegt ganz im I_1 der F_e.

Jeder Schmieg-Vektorraum der F_r liegt ebenso im entsprechenden Schmieg-Vektorraum der F_e.

Um die Projektionen der die Schmieg-Vektorräume aufspannenden Raumvektoren der F_r von den entsprechenden der F_e zu unterscheiden bezeichne

$$\underline{\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial z_{a_1}\cdots \partial z_{a_h}}}}$$

die Projektion von $\partial^h x_i/\partial z_{a_1}\cdots\partial z_{a_h}$ in den I_h der F_r. Die Massvektoren der I_h der F_r bezeichnen wir $F_{a_1\cdots a_h|b_1\cdots b_h}$ und die Grundtensoren $C_{a_1\cdots a_{2h}}$.

Für den Masstensor $F_{a|b}$ des I_1 der F_r erhalten wir aus (10)

$$F_{a|b} = E_{p|q}\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b} \qquad (a, b = 1, \cdots, r). \tag{11}$$

Wir gehen nun über zum zweiten Schmieg-Vektorraum. Durch Differentiation von (10) nach z_b erhalten wir aus (10):

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z_a \partial z_b} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b} + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial^2 y_p}{\partial z_a \partial z_b}. \tag{12}$$

Bezeichnen wir die den Γ der F_e entsprechenden Grössen der F_r mit P, so geben die zweiten Relationen im System der Frenet-Gleichungen aus (12)

$$P^{c}_{ab}\frac{\partial x_i}{\partial z_c}+\frac{\partial^2 x_i}{\underline{\underline{\partial z_a \partial z_b}}}=\left(\Gamma^{r}_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}+\frac{\partial^2 x_i}{\underline{\partial y_p \partial y_q}}\right)\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b}+\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial^2 y_p}{\partial z_a \partial z_b}. \tag{13}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 x_i}{\underline{\underline{\partial z_a \partial z_b}}}=\frac{\partial^2 x_i}{\underline{\partial y_p \partial y_q}}\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b}+\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial z_a \partial z_b}+\Gamma^{r}_{pq}\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b}-P^{c}_{ab}\frac{\partial y_r}{\partial z_c}\right], \tag{14}$$

wo der Faktor von $\partial x_i/\partial y_r$ die "verallgemeinerte" invariante Ableitung

$$\frac{D^2 y_r}{Dz_b Dz_a}=\frac{\partial^2 y_r}{\partial z_a \partial z_b}+\Gamma^{r}_{pq}\frac{\partial y_p}{\partial z_a}\frac{\partial y_q}{\partial z_b}-P^{c}_{ab}\frac{\partial y_r}{\partial z_c} \tag{15}$$

von $\partial y_r/\partial z_a$ nach z_b ist. (Ist $r=l$, so verschwindet die invariante Ableitung und (15) stellt das Transformationsgesetz der Christoffelklammer dar.)

Wir haben in (14) die Projektions-Vektoren (in den I_2 der F_r):

$$\frac{\partial^2 x_i}{\underline{\underline{\partial z_a \partial z_b}}} \tag{16}$$

linear dargestellt durch die Basis des I_{12} der F_e mit Koeffizienten, die von

$$B_{pq} \text{ und Ableitungen der } y \text{ nach den } z \tag{17}$$

allein abhängen.

In der Tat ist P^{c}_{ab} ebenfalls durch diese Grössen ausdrückbar, da P^{c}_{ab} durch $F_{a|b}$ bestimmt ist und (11) gilt. *Es besteht allgemein die Darstellung*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k x_i}{\underline{\underline{\partial z_{a_1}\cdots\partial z_{a_k}}}}&=\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}}\cdots\frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}}\\&\quad+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{\partial^m x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_m}}}T^{p_1\cdots p_m}_{a_1\cdots a_k},\end{aligned} \tag{18}$$

wo die Tensoren $T^{p_1\cdots p_m}_{a_1\cdots a_k}$, $m=1, 2, \cdots, k-1$, *durch die Reihe*

$$B_{pq}, \cdots, B_{p_1\cdots p_{2k-2}}, \tag{18'}$$

und Ableitungen der y nach den z allein bestimmt sind.

Die Behauptung ist richtig für $k=1$ und 2. Wenn wir zeigen, dass sie für $k+1$ gilt, wenn sie für $1, 2, \cdots, k$ besteht, ist sie allgemein bewiesen.

Aus (18) erhalten wir für die Masstensoren die Beziehung

$$
\begin{aligned}
F_{a_1\cdots a_k|b_1\cdots b_k} &= E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k}\frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}}\cdots\frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}}\frac{\partial y_{q_1}}{\partial z_{b_1}}\cdots\frac{\partial y_{q_k}}{\partial z_{b_k}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{k-1} E_{p_1\cdots p_m|q_1\cdots q_m}T^{p_1\cdots p_m}_{a_1\cdots a_k}T^{q_1\cdots q_m}_{b_1\cdots b_k}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Also ist auch $F_{a_1\cdots a_k|b_1\cdots b_k}$ durch die Grössen (18′) und $B_{p_1\cdots p_{2k}}$ ausgedrückt.

Durch Differentiation von (18) nach z_{a+1} erhalten wir unter Verwendung der Frenet-Formeln §3 (11):

$$
\begin{aligned}
&P^{c_1\cdots c_{k-1}}_{a_1\cdots a_k a_{k+1}}\frac{\partial^{k-1}x_i}{\underline{\underline{\partial z_{c_1}\cdots\partial z_{c_{k-1}}}}} + P^{c_1\cdots c_k}_{a_1\cdots a_k a_{k+1}}\frac{\partial^k x_i}{\underline{\underline{\partial z_{c_1}\cdots\partial z_{c_k}}}} + \frac{\partial^{k+1}x_i}{\underline{\underline{\partial z_{a_1}\cdots\partial z_{a_k}\partial z_{a_{k+1}}}}} \\
&= \frac{\partial^{k+1}x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}\partial y_{p_{k+1}}}}\frac{\partial y_{p_1}}{\partial z_{a_1}}\cdots\frac{\partial y_{p_k}}{\partial z_{a_k}}\frac{\partial y_{p_{k+1}}}{\partial z_{a_{k+1}}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{k}\frac{\partial^m x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_m}}}U^{p_1\cdots p_m}_{a_1\cdots a_{k+1}},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

wo die U-Tensoren jetzt neben den Grössen (18′) noch $B_{p_1\cdots p_{2k}}$ enthalten. Aber die P-Grössen der linken Seite von (20) sind durch $C_{a_1\cdots a_{2t}}$, $t=1, \cdots, k$, ausdrückbar, also (19) durch die Grössen (18′) und $B_{p_1\cdots p_{2k}}$. Da für $1, 2, \cdots, k$ die Behauptung voraussetzungsgemäss gilt, so folgt damit aus (20) ihre Richtigkeit für $k+1$.

Eine Folge des Tatbestandes (18) ist der Satz:

Haben zwei F_e die Grundformen bis zur $(2k)$ten Stufe gleich:

$$B_{p_1p_2}, \cdots, B_{p_1\cdots p_{2k}},$$

so haben entsprechend zugeordnete Untermannigfaltigkeiten (d. h. durch gleiche Parameterdarstellung (9) zugeordnete) ebenfalls die ersten k Grundformen gleich.

Aber auch die Umkehrung gilt:

Wenn zwei F_e so zugeordnet werden können, dass entsprechende F_r (r fixiert) gleiche Grundformen bis zur $(2k)$ten Stufe besitzen, so haben die beiden F_e ebenfalls identische Grundformen bis zur $(2k)$ten Stufe.

Beweis der Umkehrung. Multipliziert man (11) mit dz_adz_b, so folgt, dass $E_{p|q}dy_pdy_q$ für beide F_e gleich ist.

Aber mit der Willkür der F_r ist auch

$$dy_p = \frac{\partial y_p}{\partial z_a} dz_a$$

willkürlich. Also ist

$$E_{p|q} dy_p dy_q$$

für beliebige dy_p für beide F_e gleich, woraus aber die Gleichheit der ersten Grundformen folgt.

Wir denken uns nun die Gleichheit der $(h-1)$ ersten Grundformen bewiesen, dann folgt aus (19) für $k=h$ und der Voraussetzung des Satzes, dass

$$E_{p_1\cdots p_h|q_1\cdots q_h} dy_{p_1} \cdots dy_{p_h} dy_{q_1} \cdots dy_{q_h}$$

für beliebige dy_p für beide F_e gleich ist. Also gilt die Behauptung auch für die $h$te Grundform, und da sie für $h=1$ gilt, ist die Umkehrung bewiesen.

Besonders interessant wird der Satz für die $F_1(r=1)$, d. h. für Kurven der F_e. Der Zusammenhang der Formen der Kurve mit ihren Krümmungen wird durch

$$\underline{\frac{d^k x_i}{ds^k}}\,\underline{\frac{d^k x_i}{ds^k}} = \frac{1}{(\rho_1\rho_2 \cdots \rho_{k-1})^2}, \qquad ds^2 = B_{11} dy^2, \tag{21}$$

gegeben. *Also sind durch die ersten k "Grundformen" die Bogenlänge und die $(\rho-1)$ ersten Krümmungen gegeben und umgekehrt.*

Wir verweisen für den Satz, der den Spezialfall des soeben bewiesenen für $r=1$ darstellt, auf das *Lehrbuch* (XI §9, p. 226).

Bemerkungen zu III

(A) *Wir können von den in die Relation* (18) *eintretenden Tensoren $T^{p_1\cdots p_m}_{a_1\cdots a_k}$ nachweisen, dass sie nur Ableitungen der y nach z bis zur $k$ten Ordnung inklusive enthalten.*

Verfolgt man nämlich die Bildung der Γ-Grössen, so sieht man, dass

$$\Gamma^{s_1\cdots s_{h+1}}_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}} \tag{22}$$

allein aus $E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}}$, deren ersten Ableitungen und aus $\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1}}$ (unabgeleitet) gebildet ist. *Daraus folgt, dass* (22) *nur aus den $E_{p_1|q_1}, \cdots, E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}}$ und deren ersten Ableitungen aufgebaut ist.*

Der Tensor

$$\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_{h+1}p_{h+2}}$$

wieder hängt nur ab von den nichtdifferenzierten $E_{p_1\cdots p_h|q_1\cdots q_h}$ und $E_{p_1\cdots p_{h+1}|q_1\cdots q_{h+1}}$.

Diese Tatsachen aber reichen hin, um die angegebene Eigenschaft der Tensoren T in (18) nachzuweisen.

(B) Aus der Formel (19) gewinnt man sofort Relationen zwischen den Krümmungen der F_r und der F_e und den "Relativkrümmungen" der F_r in bezug auf die F_e.

(Man hat dazu nur die Differenz $F_{a_1\cdots a_{k-1}a_k|b_1\cdots b_{k-1}b_k} - F_{a_1\cdots a_{k-1}b_k|b_1\cdots b_{k-1}a_k}$ aus (19) zu bilden.)

6. Der $I_{12\ldots h}$-Schmieg-Vektorraum, seine Metrik und Parallelverschiebung*

Ist

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}} l^{p_1\cdots p_k} \tag{1}$$

ein Vektor des $I_{12\ldots h}$, so nennen wir die in (1) auftretenden symmetrischen Flächentensoren

$$l^{p_1\cdots p_k} \qquad (k = 1, \cdots, h) \tag{2}$$

die *kontravariante Darstellung* des Vektors λ_i.

Die kontravariante Darstellung ist bis auf die Nulltensoren $\theta^{p_1\cdots p_k}$ gegeben, d. h. bis auf die Lösungen von

$$\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}} \theta^{p_1\cdots p_k} = 0 \qquad (k = 2, \cdots, h), \tag{3}$$

resp.

$$E_{q_1\cdots q_k|p_1\cdots p_k}\theta^{p_1\cdots p_k} = 0 \qquad (k = 2, \cdots, h). \tag{3'}$$

Als *kovariante Darstellung* des Raumvektors λ_i bezeichnen wir die Gesamtheit der symmetrischen Flächentensoren

$$l_{p_1\cdots p_k} = \lambda_i \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}. \tag{4}$$

Während die kontravarianten Darstellungstensoren (2) keiner Einschränkung unterliegen, gilt für die kovarianten (notwendig und hinreichend):

* Dazu siehe: *Beitrag zur Differentialgeometrie* u. s. w., Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, 1931. *Zum Tensorkalkül in Vektorräumen Riemannscher Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1933.

$$l_{p_1\cdots p_k}\theta^{p_1\cdots p_k} = 0, \tag{5}$$

für jeden Nulltensor $\theta^{p_1\cdots p_k}$.

Das innere Produkt eines kovarianten Darstellungstensors kter Stufe mit einem Nulltensor kter Stufe verschwindet.

Zwischen der kontra- und kovarianten Darstellung (2) und (4) besteht die Beziehung

$$l_{p_1\cdots p_k} = E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k}l^{q_1\cdots q_k}, \tag{6}$$

die man erhält, wenn man in (4) für λ_i den Ausdruck (1) substituiert. Ferner folgt aus (1)

$$\lambda_i\lambda_i = \sum_{k=1}^{h} E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k}l^{p_1\cdots p_k}l^{q_1\cdots q_k}. \tag{7}$$

Führt man den Tensor

$$E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_r} = \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\;\underline{\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{q_1}\cdots\partial y_{q_r}}} \tag{8}$$

ein, so können wir (6) und (7) auch schreiben

$$l_{p_1\cdots p_k} = \sum_{r=1}^{h} E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_r}l^{q_1\cdots q_r} \tag{6'}$$

resp.

$$\lambda_i\lambda_i = \sum_{r,s=1}^{h} E_{p_1\cdots p_r|q_1\cdots q_s}l^{p_1\cdots p_r}l^{q_1\cdots q_s}. \tag{7'}$$

Den Tensor (8) (für $r, k=1, \cdots, h$) nennen wir den *metrischen Tensor des* $I_{12\cdots h}$.

Wir nennen nun den Raumvektor λ_i (1) *des* $I_{12\cdots h}$, *der längs eines Kurvenstückes C der* F_e *definiert ist,* $I_{12\cdots h}$*-parallel, wenn sein Raumdifferential* $d\lambda_i$ *stets normal ist zum* $I_{12\cdots h}$.

Aus der Definition folgt ohne weiteres, dass die $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung (von Vektoren des $I_{12\cdots h}$) die Längen und Winkel unverändert lässt.

Sind nämlich λ_i und μ_i jetzt $I_{12\cdots h}$-parallelverschobene Vektoren des $I_{12\cdots h}$, so ist

$$d(\lambda_i\mu_i) = d\lambda_i\mu_i + \lambda_i d\mu_i = 0,$$

da λ_i, μ_i im $I_{12\cdots h}$ und $d\lambda_i$, $d\mu_i$ normal zum $I_{12\cdots h}$ liegen.

Ist λ_i längs C ein $I_{12\cdots h}$-parallelverschobener Vektor, so folgt aus (4) und der Definition der $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung

$$dl_{p_1\cdots p_k} = \lambda_i \frac{\partial}{\partial y_t}\left(\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}}\right) dy_t. \tag{9}$$

Unter Verwendung der Frenet-Gleichungen §3 (11) schreiben wir (9)

$$\begin{aligned} dl_{p_1\cdots p_k} = \lambda_i \Bigg(\Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k t} \frac{\partial^{k-1} x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_{k-1}}}} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t}\frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_k}}} \\ + \frac{\partial^{k+1} x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}\partial y_t}}\Bigg) dy_t, \end{aligned} \tag{9'}$$

also wegen (4)

$$dl_{p_1\cdots p_k} = (\Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_{k-1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_k} + l_{p_1\cdots p_k t}) dy_t \qquad (k = 1, \cdots, h) \tag{10}$$

wo

$$l_{p_1\cdots p_h t} = 0 \tag{10'}$$

ist (4).

Das System (10), (10′) *beschreibt die* $I_{12\cdots h}$*-Parallelverschiebung durch die kovarianten* (*Flächen*)*-Darstellungstensoren des Raumvektors* λ_i *des* $I_{12\cdots h}$.*

Bezeichnet D (besser $D_{12\cdots h}$) das *absolute* $I_{12\cdots h}$-Differential

$$Dl_{p_1\cdots p_k} = dl_{p_1\cdots p_k} - (\Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_{k-1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_k} + l_{p_1\cdots p_k t}) dy_t, \tag{11}$$

so folgt durch einfache Rechnung für den metrischen Tensor (§4, (5) und (7))

$$DE_{p_1\cdots p_r | q_1\cdots q_s} = 0 \qquad (r, s = 1, \cdots, h). \tag{12}$$

Wir hätten (12) auch aus der Tatsache ableiten können, dass die $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung Längen und Winkel von Raumvektoren invariant lässt. Das System Differentialgleichungen für die kovariante $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung (10) ist völlig gleichgebaut jenem Teilsystem der Frenet-Gleichungen §3 (11), das man durch Streichung der ersten sowie der $(h+2)$ten, $(h+3)$ten, $\cdots$ bis letzten Gleichungen erhält, wenn man ausserdem in der $(h+1)$ten Gleichung noch (10′) entsprechend

---

* Ist (10) erfüllt, so folgt

$$d\lambda_i \frac{\partial^k x_i}{\underline{\partial y_{p_1}\cdots\partial y_{p_k}}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, h)$$

also $d\lambda_i$ normal zum $T_{12\cdots h}$.

$$\frac{\partial^{h+1} x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_h} \partial y_{p_{h+1}}} \tag{13}$$

weglässt.

Die Nebenbedingungen für die Lösungen von (10) sind aber die Relationen (5).

Wir stellen nun die Frage nach der vollständigen Integrabilität der $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung, also nach der des Systems (10) *mit den Nebenbedingungen* (5).

Was die Integrabilitätsbedingung der $k$ten Gleichung (10) betrifft, wenn $k=1, 2, \cdots, h-1$, so ist ihre Form

$$\sum l_{p_1\cdots p_r} A^{p_1\cdots p_r} = 0, \tag{14}$$

wenn die entsprechende der $(k+1)$ten Gleichung des Frenet-Systems

$$\sum \frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} A^{p_1\cdots p_r} = 0 \tag{15}$$

lautet. Da (15) für die gegebene F_e natürlich erfüllt ist und mit dem System

$$\frac{\partial^r x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_r}} A^{p_1\cdots p_r} = 0 \tag{16}$$

äquivalent ist, so bedeutet das, dass die Koeffizienten $A^{p_1\cdots p_r}$ Nulltensoren sind. *Damit ist* (14) *als Folge der Nebenbedingungen* (5) *erfüllt.*

Die Integrabilitätsbedingung der $h$ten Gleichung des Systems (10) dagegen ist nur dann eine Folge der Nebenbedingungen (5), wenn (§4 (33″)):

$$(\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_h p_{h+2} p_{h+1}}) E_{s_1\cdots s_h | r_1 \cdots r_h} = 0 \tag{17}$$

ist, d. h. wenn (§4 (5), §5) der $h$te Krümmungstensor verschwindet. Denn auch die Integrabilitätsbedingungen der $h$ten Gleichung (10) resp. der $(h+1)$ten Gleichung des Frenet-Systems, die wir ebenfalls in der Form (14) resp. (15) schreiben können, haben dieselben Koeffizienten A mit Ausnahme des $A^{s_1\cdots s_h}$ (soweit die $l_{p_1\cdots p_r}$ auftreten).

Diese beiden A aber unterscheiden sich §4 (33) gerade um die Differenz

$$\Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_{h+1} p_{h+2}} - \Gamma^{s_1\cdots s_h}_{p_1\cdots p_{h+2} p_{h+1}}. \tag{18}$$

Da aber der entsprechende Koeffizient A in der aus dem Frenet-System abgeleiteten Integrabilitätsbedingung offenbar ein Nulltensor ist, so kann der aus (10) hergeleitete nur dann einer sein, wenn (18) einer ist.

Wir haben somit:

Die Integrabilitätsbedingungen des Systems (10) *sind dann und nur dann eine Folge der Nebenbedingungen* (5), *wenn der hte Krümmungstensor der* F_e *verschwindet.*

Sei jetzt

$$M = l_{p_1\cdots p_k}\theta^{p_1\cdots p_k} = 0, \tag{19}$$

$\theta^{p_1\cdots p_k}$ Nulltensor, eine Nebenbedingung des Systems (10). Wir bilden die "abgeleitete" Gleichung

$$\begin{aligned} dM &= (\Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_{k-1}} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t} l_{r_1\cdots r_k} + l_{p_1\cdots p_k t})\theta^{p_1\cdots p_k} dy_t \\ &\quad + l_{p_1\cdots p_k} d\theta^{p_1\cdots p_k} \\ &= \Gamma^{r_1\cdots r_{k-1}}_{p_1\cdots p_k t}\theta^{p_1\cdots p_k} l_{r_1\cdots r_{k-1}} dy_t \\ &\quad + (d\theta^{r_1\cdots r_k} + \Gamma^{r_1\cdots r_k}_{p_1\cdots p_k t}\theta^{p_1\cdots p_k} dy_t)\, l_{r_1\cdots r_k} + l_{p_1\cdots p_k t}\theta^{p_1\cdots p_k} dy_t = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

die aber (§3 (19), (20) und (21))

$$dM = \tilde{\theta}^{r_1\cdots r_{k-1}} l_{r_1\cdots r_{k-1}} + \tilde{\tilde{\theta}}^{r_1\cdots r_k} l_{r_1\cdots r_k} + \tilde{\tilde{\tilde{\theta}}}^{p_1\cdots p_k t} l_{p_1\cdots p_k t} \tag{21}$$

geschrieben werden kann. D. h.: das abgeleitete System der Nebenbedingungen (5) selbst ist eine Folge von (5). Somit gilt der Satz (nur für den euklidischen R_n):

Notwendig und hinreichend für die vollständige Integrabilität der $I_{12\cdots h}$-*Parallelverschiebung ist das Verschwinden des hten Krümmungstensors der* F_e.

Erste Bemerkung. Ist der $I_{12\cdots m}$ der grösste Schmieg-Vektorraum, so ist die $I_{12\cdots m}$-Parallelverschiebung total integrabel.

Dieser Satz ist eine triviale Folge des vorhergehenden. Wir können ihn aber ohne Mühe direkt ableiten. Die Einbettungszahl ϵ der F_e fällt ja mit der Dimensionszahl des $I_{12\cdots m}$ zusammen, d. h. die F_e liegt ganz in einem E_ϵ so, dass *jeder* Raumvektor λ_i des E_ϵ, der in einem Punkt der F_e definiert ist, durch (seine) Flächenkomponenten (4) beschreibbar ist.

Weiter ist die $I_{12\cdots m}$-Parallelverschiebung hier identisch mit der Parallelverschiebung der E_ϵ, *also vollständig integrabel.* (Da es keinen Normalvektorraum zum $I_{12\cdots m}$ in der E_ϵ gibt, ist $d\lambda_i = 0$ die Gleichung der $I_{12\cdots m}$-Parallelverschiebung.)

Zweite Bemerkung. Die $I_{12\cdots h}$-Parallelverschiebung gibt Anlass zur Definition der "$I_{12\cdots h}$-*Geodätischen*" als jenen Kurven, die enstehen, wenn ein Vektor λ_i des $I_{12\cdots h}$ stets in der Richtung $I_{12\cdots h}$-parallel verschoben wird, die durch seine Projektion in den Tangentialraum I_1 gegeben ist.

7. Die F_e im R_n konstanter Krümmung

Da wir jetzt nicht mehr den Vorteil haben, kartesische Koordinaten verwenden zu können, müssen wir für die folgende Betrachtung das *absolute Raumdifferential* von Vektoren resp. Tensoren des R_n verwenden statt des gewöhnlichen Differential wie bisher.

Ist also λ^i ein (kontravarianter) Raumvektor, so bezeichne $\vartheta\lambda^i$

$$\vartheta\lambda^i = d\lambda^i + \left\{ {i \atop jk} \right\} \lambda^j dx_k \qquad (i, j, k = 1, \cdots, n) \tag{1}$$

das absolute Differential dieses Vektors.

Für den Masstensor g_{ik} des R_n gilt $\vartheta g_{ik} = 0$.

Bezeichnung. Für Raum-Indizes seien die Buchstaben $a, b, \cdots, k$ verwendet, für Flächen-Indizes die übrigen: $l, m, n, \cdots$. (Also laufen a, b bis k von 1 bis n, und l, m bis z von 1 bis l.) Wenn wir von *absoluter Ableitung* sprechen, so denken wir vorerst nur an die Transformationen der Raumkoordinaten. Wir denken uns also in der in Parameterform gegebenen F_e

$$x_i = x_i(y_1, \cdots, y_e) \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

die y fest. (Wie sich dann die definierten Grössen gegen Parametertransformation verhalten, werden wir genau wie im euklidischen Fall ohne Mühe konstatieren.)

Was die Schmieg-Vektorräume $I_{12\cdots k}$ betrifft, so müssen wir für ihre Definition die absoluten Ableitungen verwenden. Die Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \qquad (p = 1, \cdots, l) \tag{3}$$

spannen den I_1 auf. Durch absolute Differentiation der Vektoren (3) gewinnen wir die Raum-Vektoren

$$\frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta y_q \vartheta y_p} = \frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \frac{\partial x_j}{\partial y_p} \frac{\partial x_k}{\partial y_q}, \tag{4}$$

die mit den Vektoren (3) zusammen den I_{12} aufspannen. Eine Parametertransformation (§ (1), (4)) führt zu

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p}. \tag{5}$$

Da für die absolute Ableitung die Rechenregeln wie für die gewöhnliche gelten, folgt aus (5)

$$\frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta \bar{y}_q \vartheta \bar{y}_p} = \frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta y_r \vartheta y_s} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{y}_p} \frac{\partial y_s}{\partial \bar{y}_q} + \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \frac{\partial^2 y_r}{\partial \bar{y}_p \partial \bar{y}_q}, \tag{6}$$

wo $\partial^2 y_r/\partial\bar{y}_p\partial\bar{y}_q$ die gewöhnliche zweite Ableitung von y_r nach $\bar{y}_p$, $\bar{y}_q$ ist. (Die absolute Ableitung betrifft ja nur Raum-Indizes.)

Aus (5) und (6) folgt die Invarianz der I_1, I_{12} gegen Parameter-Änderung. Wir definieren nun genau wie zuvor den I_2 als grössten Untervektorraum des I_{12} normal zum I_1. Wenn dann wieder

$$\underline{\frac{\vartheta^2 x_i}{\vartheta y_p \vartheta y_q}} \tag{7}$$

die Projektion der zweiten absoluten Ableitung $\vartheta^2 x_i/\vartheta y_p \vartheta y_q$ in den I_2 bezeichnet, so folgt wie früher aus (6) der Flächentensorcharakter der Grössen (7), die den I_2 aufspannen.

Die Definition der $I_{12\ldots h}$- resp. I_h-Räume und der Nachweis der Invarianz gegen Parametertransformationen, sowie des Flächen-Tensorcharakters der Grössen

$$\underline{\frac{\vartheta^k x_i}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_k}}} \tag{8}$$

geschieht wie im §1 und bietet keine Schwierigkeiten.

Wir haben noch nicht benutzt, dass der R_n von konstanter Krümmung ist. Diese Voraussetzung wollen wir nun zur Herleitung einer wichtigen Relation verwenden:

Wir gehen dabei von der Relation aus

$$\begin{aligned} &\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_t}}}\right)\right] - \frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_t}}}\right)\right] \\ &= - R^{\,i}_{\cdot jab}\, \underline{\frac{\vartheta^t x_j}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_t}}}\, \frac{\partial x_a}{\partial y_q}\, \frac{\partial x_b}{\partial y_r}, \end{aligned} \tag{9}$$

die man aus (1) sofort ableitet, und in der

$$R_{ijab} = k(g_{ia}g_{jb} - g_{ib}g_{ja}) \tag{10}$$

der Krümmungstensor des R_n der konstanten Krümmung k ist. Setzt man (10) in (9) ein, so wird die rechte Seite gleich

$$- k\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\left(g_{jb}\, \underline{\frac{\vartheta^t x_j}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_t}}}\, \frac{\partial x_b}{\partial y_r}\right) + k\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left(g_{ja}\, \underline{\frac{\vartheta^t x_j}{\vartheta y_{p_1} \cdots \vartheta y_{p_t}}}\, \frac{\partial x_a}{\partial y_q}\right),$$

also Null für $t \neq 1$. Für $t = 1$ wird sie gleich

$$- k \frac{\partial x_i}{\partial y_q}\left(g_{jb}\frac{\partial x_j}{\partial y_{p_1}}\frac{\partial x_b}{\partial y_r}\right) + k\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left(g_{ja}\frac{\partial x_j}{\partial y_{p_1}}\frac{\partial x_a}{\partial y_q}\right)$$

$$= - k \frac{\partial x_i}{\partial y_s}(\delta_q^s B_{p_1 r} - \delta_r^s B_{p_1 q}),$$

wo

$$B_{pq} = g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\frac{\partial x_k}{\partial y_q} \tag{11}$$

der Masstensor der F_e (des I_1) ist. Wir erhalten somit

$$\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)\right] - \frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)\right] \tag{12}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{für } t \neq 1, \\ - k\dfrac{\partial x_i}{\partial y_s}(\delta_q^s B_{p_1 r} - \delta_r^s B_{p_1 q}), & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

Wir sind jetzt in der Lage die Symmetrie der Grössen (8) in bezug auf die Indizes $p_1, \cdots, p_k$ nachzuweisen. Aus der Definition dieser Grössen als Projektion von

$$\frac{\vartheta^k x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_k}}$$

in den I_k folgt

$$\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}} = \underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}} + \text{Vektor des } I_{12\cdots t-1}. \tag{13}$$

Durch absolute Differentiation nach y_q erhalten wir daraus

$$\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}\right) = \frac{\vartheta^{t+1} x_i}{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}} = \frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right) \tag{14}$$

$$+ \text{Vektor des } I_{12\cdots t}.$$

Wir schreiben (14) anders

$$\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right) = \frac{\vartheta^{t+1} x_i}{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}} + \text{Vektor des } I_{12\cdots t}. \tag{14'}$$

Daraus folgt durch Differentiation nach y_r

$$\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\underline{\frac{\vartheta^t x_i}{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)\right] = \frac{\vartheta^{t+2} x_i}{\vartheta y_r \vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}} \tag{15}$$

$$+ \text{Vektor des } I_{12\cdots t+1},$$

und weiter durch Projektion in den I_{t+2}

$$(16)\qquad \underline{\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\frac{\vartheta^t x_i}{\underline{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)\right]}_{t+2} = \frac{\vartheta^{t+2}x_i}{\underline{\vartheta y_r \vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}.$$

Aus (12) und (16) folgt *die Symmetrie der linken also auch der rechten Seite von* (16) *in r und q.*

Wir erhalten weiter aus (14′), bei Benutzung von (13) (für $t+1$ statt t)

$$(17)\qquad \frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\frac{\vartheta^t x_i}{\underline{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right) = \frac{\vartheta^{t+1}x_i}{\underline{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}} + \text{Vektor des } I_{12\cdots t},$$

was durch Differentiation und darauf folgender Projektion in den I_{t+2}

$$(18)\qquad \underline{\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y_q}\left(\frac{\vartheta^t x_s}{\underline{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)\right]}_{t+2} = \underline{\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left(\frac{\vartheta^{t+1}x_i}{\underline{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)}_{t+2}$$

gibt, also (16),

$$(19)\qquad \underline{\frac{\vartheta}{\vartheta y_r}\left(\frac{\vartheta^{t+1}x_i}{\underline{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}\right)}_{t+2} = \frac{\vartheta^{t+2}x_i}{\underline{\vartheta y_r \vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}.$$

Haben wir gezeigt, dass

$$\frac{\vartheta^{t+1}x_i}{\underline{\vartheta y_q \vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_t}}}$$

in den unteren Indizes symmetrisch ist, so folgt die Symmetrie der rechten Seite von (19) in den Indizes $q, p_1, \cdots, p_t$. Aber wir zeigten soeben auch die Symmetrie in q und r. Das heisst also, da $(t=1)$ $\vartheta^2 x_i/\vartheta y_q \vartheta y_p$ (offenbar) symmetrisch ist, *dass die Grössen* (8) *symmetrische Flächentensoren darstellen.*

Wir haben damit alles hergeleitet, was nötig ist, um die Verhältnisse aus dem euklidischen R_n auf unseren Fall zu übertragen. Die Masstensoren der I_k-Räume sind wie dort

$$(20)\qquad E_{p_1\cdots p_k|q_1\cdots q_k} = g_{ij}\frac{\vartheta^k x_i}{\underline{\vartheta y_{p_1}\cdots\vartheta y_{p_k}}}\,\frac{\vartheta^k x_j}{\underline{\vartheta y_{q_1}\cdots\vartheta y_{q_k}}},$$

und aus ihnen werden die Grundtensoren wie dort durch symmetriesieren gewonnen. Die Frenet-Gleichungen §3 (11) ersetzt man durch ein völlig gleichgebautes System, nur dass für das gewöhnliche Differential auf der linken Seite das absolute Differential zu setzen ist. Dasselbe gilt für die Nebenbedingungen §4 (2), und für die wichtigen Formeln (5) und (7) des §4 erhalten wir dieselben Ausdrücke.

Was die Integrabilitätsbedingungen des neuen Systems der Frenet-Gleichungen betrifft, so lauten sie bis auf die zweite (nach (12)) genau wie die für den euklidischen Fall abgeleiteten.

Nur die der Gleichung ((15), §4) entsprechende lautet jetzt etwas anders, da der der Gleichung (§4 (13)) entsprechende Ausdruck für absolute Ableitungen jetzt nicht Null ist, sondern gleich ist der rechten Seite von (12). Aber an den Überlegungen, die dort zum Ziele führten, ist nichts zu ändern. Sie liefern genau wie dort den Beweis der Theoreme.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, N.J.